Propositionaalisten asenteiden logiikka

Tuomo Aho

1

Alkuperäinen modaalilogiikka oli nimenomaan välttämättömyyden ja mahdollisuuden logiikkaa. Niinpä edellä on annettu formaalisen operaattorin $\Box$ tulkinnaksi juuri välttämättömyys, ja tarkoituksena on ollut etsiä sellaisia syntaktisia ja semanttisia ratkaisuja, jotka ovat tämän tulkinnan kannalta mielekkäitä. Mutta kun käytettävissä on tällainen formaalinen välineistö, voidaan myös kysyä, soveltuisiko se esittämään joidenkin muiden käsitteiden säännönmukaisuuksia. Ajatuksena siis on, että yleinen modaalilogiikka on formaalinen, ehkä matemaattinen teoria, jolla on eri käyttöjä, kun formaaliset yksiköt tulkitaan vastaamaan joitakin luonnollisen kielen yksiköitä. Eräs tällainen modaalilogiikan sovellusala on niin sanottu propositionaalisten asenteiden logiikka.

Ajatelkaamme kuuluisinta propositionaalista asennetta, tietämistä. Tavallisessa, ns. aleettisessa modaalilogiikassa lauseen $\Box A$ intuitiivinen tulkinta on "on välttämätöntä, että A". Tietämisen logiikassa operaattori tulkitaan toisin, ja lauseen $\Box A$ vastine luonnollisessa kielessä on "a tietää, että A". Jollei kyseessä ole pelkkä lyhennysmerkintä, vaan tarkoituksena on todellakin tehdä logiikkaa, on myös asetettava formaalisia ehtoja, joita näin tulkittu $\Box$ täyttää. Näiden ehtojen pitäisi vastata mahdollisimman hyvin sitä käsitystä, joka meillä on tietämisestä. Tietämisen käsitteen ymmärtämiseen sisältyy kuva joistakin säännönmukaisuuksista, joita tietämistä koskevat lauseet noudattavat, ja tavoitteena on, että säätämämme formaaliset säännönmukaisuudet vastaisivat niitä.

Asetettavat ehdot voivat olla sekä syntaktisia että semanttisia. Toisin sanoen voidaan toisaalta antaa tietämistä koskevan $\Box$-operaattorin aksioomia ja päättelysääntöjä, toisaalta määritellä malleja, joilla tulee olla erityisiä ominaisuuksia. Mikäli käytetään mahdollisten maailmojen semantiikkaa, kyseessä ovat mahdollisten maailmojen väliset relaatiot.

Jotta modaalilogiikkaa voitaisiin soveltaa, on kuitenkin ajateltava, että luonnollisen kielen ja tavallisen ajattelun tietäminen on modaalinen ja propositionaalinen operaattori, kuten formaalinen $\Box$ on. Tähän oletukseen liittyy filosofisia ongelmia, joihin palaamme lopuksi.

Asennelogiikan ensimmäiset näytteet ovat 1300-luvulta. Silloin sitä ei tosin yhdistetty modaalilogiikkaan, mutta ns. consequentia-tutkielmiin ilmestyi jaksoja tietämislauseiden erikoisista seuraussuhteista [2]. Tämä harrastus jäi kuitenkin syrjään jo ennen kuin koko modaalilogiikka kuihtui keskiajan lopussa. Sittemmin eräillä uuden ajan filosofiklassikoilla (Descartes, Arnauld, Hobbes, Leibniz) on hajahuomautuksia, jotka ovat asennelogiikan kannalta kiinnostavia, mutta varsinaisena tutkimuskohteena se ei esiinny.

Niin sanottu "moderni logiikka" syntyi kokonaan vailla modaalilogiikkaa. Kun sen yhteyteen sittemmin alettiin kehitellä modernia modaalilogiikkaa, ensimmäiset systeemit oli suunniteltu yksinomaan välttämättömyyttä silmällä pitäen. (Esim. C. I. Lewis 1910-luvulta alkaen.) Käänteentekevä uusi askel oli se, että lausuttiin selvästi ajatus yleisestä formaalisesta modaalikielestä, jonka operaattorilla voi olla useita intuitiivisia tulkintoja. Tämä tapahtui G. H. von Wrightin klassisessa monografiassa [11], josta yleistetty modaalilogiikka alkaa. Silloin von Wright myös esittää tiedon yhtenä mahdollisena modaliteettina. Näin tie asennelogiikkaan oli avattu.

Ensimmäiset aksiomatisointiyritykset eivät kuitenkaan olleet kovin valaisevia. Projekti pääsi ratkaisevasti vahvemmalle pohjalle, kun siihen yhdistettiin myös semantiikka. Mahdollisten maailmojen semantiikka oli osoittautunut tehokkaaksi aleettisessa modaalilogiikassa, ja Jaakko Hintikka sovelsi sen myös tietämisen ja uskomisen käsitteisiin kirjassaan *Knowledge and Belief* ([6]). Tämä teos merkitsi olennaista edistystä, koska siinä 1) konstruoidaan asennelauseille täsmällisesti määritelty semantiikka, 2) ilmaistaan asenteiden ominaisuuksia semanttisilla ehdoilla (maailmojen vaihtoehtosuhteilla), 3) käsitellään kahta eri asennetta (knowledge, belief), 4) käytetään täsmällisiä menetelmiä, esimerkiksi suoritetaan todistuksia.

Tietämisen logiikka oli suosittu keskustelun aihe filosofisissa lehdissä 1960-luvulla, mutta jäi jossain määrin pois muodista 1970-luvun edetessä. Tämä ensimmäinen vaihe tuotti kuitenkin huomattavia tuloksia: Hintikan alkuperäinen vaikeaselkoinen semanttinen formalismi vaihdettiin helpommaksi, monia mahdollisia aksioomia analysoitiin, ja aloitettiin myös asennelogiikan predikaattiloogisen muodon tutkimus. Tällöin asetettiin suuri osa niistä kysymyksistä, joihin on viime aikoina jälleen palattu.

Uusi käänne tapahtui 1980-luvulla, kun tietojenkäsittelyteorian tutkijat kiinnostuivat asennelogiikasta. Erilaisia asennelogiikan muunnelmia on sittemmin käsitelty sangen paljon tietojenkäsittelytieteen välineinä [5, 3, 10]. (Emme kuitenkaan paneudu näihin sovellutuksiin.) Asennelogiikan ongelmia on jouduttu käsittelemään myös kognitiivisen psykologian ja lingvistiikan yhteydessä.

2

Kaikkea propositionaalisten asenteiden logiikkaa sanotaan usein yksinkertaisuuden vuoksi episteemiseksi logiikaksi. Tarkkaan ottaen *episteeminen* logiikka on nimenomaan tiedon (kr. episteme) logiikkaa; se on ollut asennelogiikan suosituin ala. Toisaalta *doksastinen* logiikka tutkii uskomista (kr. doxa = uskomus).

Tieto ja usko kuuluvat luontevasti yhteen, mutta on myös muita propositionaalisia asenteita, joihin voi koettaa soveltaa asennelogiikan perusajatuksia.

(Olihan tavoitteena nimenomaan yleistäminen.) On monta sellaista propositionaalista asennetta, jota ilmaisevan verbin voi käsittää modaalioperaattorin vastineeksi. Useiden kohdalla on myös tehty loogisia yrityksiä.

Esimerkki 1. Asenneoperaattoreita, joita kirjallisuudessa on käsitelty loogisesti:

- a tietää että A, eli $\mathrm{K}_a A$
- a uskoo että A, eli $\mathrm{B}_a A$
- a havaitsee että A, eli $\mathrm{P}_a A$
- a näkee että A, eli $\mathrm{S}_a A$
- a tahtoo että A, eli $\mathrm{W}_a A$
- a muistaa että A, eli $\mathrm{M}_a A$
- a kuvittelee että A, eli $\mathrm{I}_a A$
- fiktioteoksessa E on A, eli $\Phi_E A$
- teorian $\mathcal{T}$ mukaan on A, eli $\mathrm{B}_{\mathcal{T}} A$ eli $\mathcal{T}(A)$.

Kannattaa myös huomata, että tavallisten asenneverbien merkitykset ovat usein epäselviä ja häilyviä. Looginen esitys voi eksplikoida niitä. Esimerkiksi uskomiseksi voidaan sanoa hyvin erilaisia asenteita, ja looginen esitys saattaa kuvata niistä jotain täsmällisemmin tai verrata useita erilaisia uskomisia toisiinsa.

Asennelogiikka sijoitetaan yleensä modaalilogiikan yhteyteen, mutta on eräitä tärkeitä piirteitä, joissa se eroaa tavallisesta modaalilogiikasta:

(1) Asenteet ovat aina *jonkun* asenteita, ja niinpä asennekaavoilla on subjektit. Perustapaus ei ole ”tiedetään” vaan ”a tietää”. Siksi asennelogiikan kaavoilla on eri rakenne kuin aleettisilla kaavoilla. Ne ovat monimutkaisempia, sillä niihin sisältyy sekä subjekti että propositio: ei $\Box A$ vaan $\Box(a, A)$. Yleisessä asennelogiikassa lauseet siis voivat vaihdella kolmen muuttujan suhteen:

- a tietää että A, a tietää että B, ...
- a tietää että A, b tietää että A, ...
- a tietää että A, a uskoo että A, ...

Subjektin ei välttämättä tarvitse olla henkilö, vaan se voi olla myös sosiaalinen ryhmä taikka teoria, tiedosto, tms. (Sosiaalisesta tiedosta ks. esim. [8].)

(2) Aleettisessa ja deonttisessa logiikassa keskeinen dualiteetti, vastavuoroinen määriteltävyys operaattorien $\Box$ ja $\Diamond$ välillä ei ole asenteiden yhteydessä vakuuttava. Asenteen logiikassa näyttää olevan vain yksi operaattori: luonnollisen kielen kannalta on selvää, että perustapaus on ”tietää” eikä ”ei tiedä että ei”.

(3) Jos tavoitteena on deskriptiivinen esitys inhimillisten agenttien ajattelusta, niin on olennaista, että asenteita on useanlaisia. (Tämä voi olla eräs seikka, joka erottaa ajattelijoita tietokoneista.)

(4) Asenneverbien merkityksen ymmärtämiselle on tärkeää, että asenteet voivat koskea asenteita (ja myös toisen subjektin asenteita); siis iteraatio on sallittava.

Jos jollekin propositionaaliselle asenteelle ryhdytään suunnittelemaan logiikkaa, edellytetään, että asianomaisilla asennelauseilla on joitakin (niille ominaisia) universaalisia säännönmukaisuuksia. Ne eivät ole empiirisiä yleistyksiä, vaan ovat voimassa käsitteellisistä syistä. On kuitenkin huomattava, että termi "propositionaalisten asenteiden logiikka" on filosofisesti ongelmallinen. Laaditaanko rekonstruktiota kielen asennelauseille vai asennesubjektien todellisille psykologisille tiloille?

Yleisen asennelogiikan kannalta on syytä kysyä, mitkä oikeastaan ovat luonnollisen kielen asennepredikaatit. Vastaukseksi ei silloin riitä pelkkä esimerkkien lista. Tyydyttävää tulosta ei saada myöskään millään puhtaasti syntaktisella kriteerillä; esimerkiksi ne verbit, jotka voivat saada objektikseen että-lauseen, eivät muodosta mitään selkeää luokkaa. On ilmeisesti vedottava termien merkitykseen ja sanottava, että asennepredikaatti kuvaa subjektin todellista, psykologista asennoitumistilaa.

Sellaisilla luonnollisen kielen asenneverbeillä on kyllä paljon muita kieliopillisia konstruktioita yksinkertaisen että-lauseen lisäksi (kuten helposti huomaa harkitsemalla verbejä 'tietää', 'muistaa', jne.). Niiden analyysi vaatii ainakin predikaattilogiikkaa ja ehkä jotain muutakin, joten sitä sivuamme vain lopussa pikimmiten.

3

Onko sitten olemassa ylipäänsä mitään tyypillisesti asenneloogisia tuloksia? Se ei ole suinkaan itsestään selvää. Mutta voimme ajatella esimerkiksi ns. "klassista tiedon määritelmää", joka on jo Platonilla. Sen mukaan tieto on yhtä kuin hyvin perusteltu tosi uskomus. Tässä 'hyvin perusteltu' on aiheuttanut paljon kiistaa, ja on väitetty, että se ei sovellu määritelmään. Olipa sen asian kanssa miten tahansa, uskottavilta näyttävät kuitenkin säännön kaksi muuta komponenttia:

- se minkä joku tietää, on totta
- sen minkä joku tietää, hän uskoo.

Siinä meillä on kaksi loogista periaatetta, jotka eivät kuulu muun logiikan piiriin:

$$\mathrm{K}_a A \to A,$$
$$\mathrm{K}_a A \to \mathrm{B}_a A.$$

Näyttää siis siltä, että propositionaalisista asenteista voidaan lausua erityisiä loogisia totuuksia. Päämääränä on tavoittaa nämä totuudet syntaktis-semanttisilla systeemeillä.

Aksioomat ovat eri asenteilla erilaiset, mutta semantiikassa voidaan käyttää yhteisiä menetelmiä, kuten edellä käytettyä mahdollisten maailmojen semantiikkaa. Olkoon siis W mahdollisten maailmojen joukko ja $w \in W$. Modaalioperaattoria $\Box$ koskeva yleinen totuusehto kuului

$$w \vDash \Box A \Leftrightarrow (\forall w' \in W \colon wRw' \Rightarrow w' \vDash A),$$

eli lause $\Box A$ on tosi maailmassa w, jos ja vain jos A on tosi kaikissa maailmoissa, jotka ovat mahdollisia suhteessa maailmaan w. Jos tarkasteltavana on jokin asenneoperaattori, voidaan käyttää samaa määritelmää, kunhan muistetaan, että kutakin operaattoria vastaa oma vaihtoehtorelaatio. On tapana merkitä operaattorin K_a relaatiota R_a^{K}, operaattorin B_b relaatiota R_b^{B}, jne. Näin siis saadaan esimerkiksi

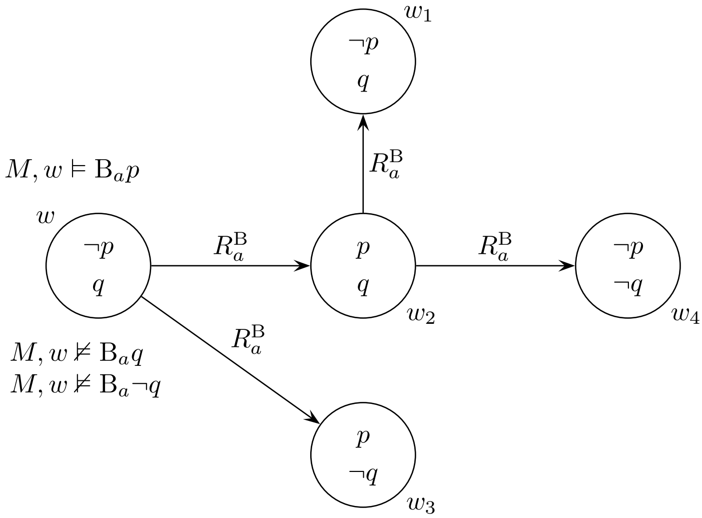
$$w \vDash \mathrm{K}_a A \Leftrightarrow (\forall w' \in W \colon wR_a^{\mathrm{K}}w' \Rightarrow w' \vDash A).$$

Usein sanotaan, että ne maailmat w', joille $wR_a^{\mathrm{K}}w'$, ovat (a:lle w:ssä) *episteemisesti mahdollisia*. On olennaista ymmärtää, mitä tällainen sanontatapa tarkoittaa. ”Episteemisesti mahdollisia” ovat ne asiaintilat, joissa kaikki a:n todelliset tiedot pitävät paikkansa. Sen sijaan ne asiat, joita a ei tiedä suuntaan eikä toiseen, voivat episteemisesti mahdollisissa olosuhteissa olla miten tahansa. Siksi episteemisiä vaihtoehtoja voi olla useita. Samoin ”a:n kuvitelmien kannalta mahdollisia” ovat kaikki ne maailmat, joissa a:n kuvitelmat ovatkin tosia. Ylipäänsä vaihtoehtoja jonkin asennelajin suhteen ovat ne maailmat, joissa kyseisen lajin asenteet ovat tosia eli joissa mikään ei ole ristiriidassa asenteiden sisällön kanssa. Ne ovat ”asenteen suhteen mahdollisia” sikäli, että kyseinen asenne *ei sulje pois* mitään näistä asiaintiloista. Mutta maailma, jossa esimerkiksi jokin aktuaalinen uskomus on epätosi, on doksastisesti mahdoton, sitä ei uskomusasenne salli.

Esimerkki 2. Olkoon $W = \{w, w_1, w_2, w_3, w_4\}$,

$$R_a^{\mathrm{B}} = \{\langle w, w_2\rangle, \langle w, w_3\rangle, \langle w_2, w_1\rangle, \langle w_2, w_4\rangle\},$$

$P(p) = \{w_2, w_3\}$, $P(q) = \{w, w_1, w_2\}$. Maailmassa w on totta $\mathrm{B}_a p$, sillä p on tosi kaikissa maailmoissa w', joille on $wR_a^{\mathrm{B}}w'$ – toisin sanoen maailmoissa w_2 ja w_3. Sen sijaan lauseista $\mathrm{B}_a q$ ja $\mathrm{B}_a \neg q$ ei kumpikaan ole tosi maailmassa w.



On tärkeää panna merkille, että lauseen $\mathrm{B}_a p$ totuus maailmassa w ei riipu lauseen p totuudesta maailmassa w eikä liioin lauseen $\mathrm{B}_a p$ totuudesta doksastisissa vaihtoehdoissa, vaan ainoastaan lauseen p totuudesta niissä.

On helppo nähdä, miten modaalioperaattoria varten annetut täsmälliset määritelmät voidaan kirjoittaa asenneoperaattorin tapauksessa. Esimerkiksi a:n episteemisen operaattorin Kripke-semantiikkaa varten voidaan antaa kehys $\langle W, R_a^{\mathrm{K}} \rangle$ ja määritellä edelleen valuaatio P ja malli M tutulla tavalla. Yleisemmin, tarkastelkaamme kieltä, jossa on asenneoperaattori A_a. Olkoon W epätyhjä joukko ja $R_a^{\mathrm{A}} \subseteq W \times W$. Määritellään, että kehys $F = \langle W, R_a^{\mathrm{A}} \rangle$. Valuaatiofunktio P liittää jokaiseen lausemuuttujaan p_i joukon W osajoukon $P(p_i)$. Malli M on struktuuri $\langle F, P \rangle = \langle W, R_a^{\mathrm{A}}, P \rangle$. Totuusmääritelmä on ilmeinen:

$$\begin{aligned}
M, w \vDash p_i &\Leftrightarrow w \in P(p_i), \\
M, w \vDash \neg A &\Leftrightarrow M, w \nvDash A, \\
M, w \vDash A \wedge B &\Leftrightarrow M, w \vDash A \text{ ja } M, w \vDash B, \\
M, w \vDash \mathrm{A}_a A &\Leftrightarrow (\forall w' \in W \colon w R_a^{\mathrm{A}} w' \Rightarrow w' \vDash A).
\end{aligned}$$

Tämän jälkeen saadaan välittömästi tavanomaiset määritelmät muille konnektiiveille, validisuudelle, jne.

Formaalinen puoli muuttuu hieman monimutkaisemmaksi siinä tapauksessa, että tarkasteltavana on useita propositionaalisia asenteita. Kielessä on silloin useita asenneoperaattoreita $\Box_1, \Box_2, \ldots, \Box_n$, ja kehykseen täytyy vastaavasti sisällyttää oma relaatio kutakin tapausta varten; siis kehys tulee olemaan $\langle W, R_1, R_2, \ldots, R_n \rangle$. Kaavojen induktiivinen totuusmääritelmä saa vuorostaan vastaavat ilmeiset täydennykset.

Esimerkki 3. Olkoon q lause 'Maa on litteä' ja tarkoittakoon l Liisaa ja m Mattia. Lause $\mathrm{K}_l\big(\neg q \wedge \mathrm{B}_m(q \wedge \mathrm{B}_l \neg q)\big)$ on symbolinen käännös lauseelle 'Liisa tietää, että Maa ei ole litteä, mutta että Matti uskoo hänen erehtyvän siinä luulossaan'. Sen totuudella tarkoitetaan sen totuutta aktuaalisessa maailmassa w. Lause q ei ole tosi aktuaalisessa maailmassa eikä muissakaan Liisan tietämysmaailmoissa. Niistä saavutettavissa Matin uskomusmaailmoissa, jotka ovat myös aktuaalisesti Matin uskomusmaailmoja, on totta $q \wedge \mathrm{B}_l \neg q$. Siis Liisan uskomusmaailmoissa, jotka ovat näistä Matin uskomusmaailmoista saavutettavissa, on $\neg q$. Joukko W koostuu nyt ainakin aktuaalisesta maailmasta, Liisan tietämysmaailmoista, Liisan uskomusmaailmoista ja Matin tietämysmaailmoista. Tarkasteltava Kripke-malli on struktuuri $\langle W, R_l^{\mathrm{K}}, R_l^{\mathrm{B}}, R_m^{\mathrm{B}}, P\rangle$, jossa P ilmaisee lausemuuttujien totuusarvot eri maailmoissa. Tällöin

$$\begin{aligned} &w \vDash \mathrm{K}_l\big(\neg q \wedge \mathrm{B}_m(q \wedge \mathrm{B}_l \neg q)\big), \\ &\qquad\qquad \text{kun } w_1 \vDash \neg q \text{ ja } w_1 \vDash \mathrm{B}_m(q \wedge \mathrm{B}_l \neg q) \text{ kaikilla } w_1\text{, joilla } wR_l^{\mathrm{K}} w_1, \end{aligned}$$

ja edelleen

$$w_1 \vDash \mathrm{B}_m(q \wedge \mathrm{B}_l \neg q), \text{kun } w_2 \vDash q \text{ ja } w_2 \vDash \mathrm{B}_l \neg q \text{ kaikilla } w_2\text{, joilla } w_1 R_m^{\mathrm{B}} w_2,$$

sekä vihdoin

$$w_2 \vDash \mathrm{B}_l \neg q, \text{ kun } w_3 \vDash \neg q \text{ kaikilla } w_3\text{, joilla } w_2 R_l^{\mathrm{B}} w_3.$$

Jos ajattelemme, että w_1 on mielivaltainen maailma, jolle $wR_l^{\mathrm{K}} w_1$, w_2 mielivaltainen maailma, jolle $w_1 R_m^{\mathrm{B}} w_2$, ja w_3 mielivaltainen maailma, jolle $w_2 R_l^{\mathrm{B}} w_3$ niin seurava kuvio havainnollistaa, mistä on kysymys:

$$\underset{w}{\boxed{\mathrm{K}_l\big(\neg q \wedge \mathrm{B}_m(q \wedge \mathrm{B}_l \neg q)\big)}} \xrightarrow{R_l^{\mathrm{K}}} \underset{w_1}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{B}_m(q \wedge \mathrm{B}_l \neg q) \\ \neg q\end{array}}} \xrightarrow{R_m^{\mathrm{B}}} \underset{w_2}{\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{B}_l \neg q \\ q\end{array}}} \xrightarrow{R_l^{\mathrm{B}}} \underset{w_3}{\boxed{\neg q}}$$

Ryhdymme soveltamaan modaalilogiikan semanttisia menetelmiä propositionaalisiin asenteisiin. Tällöin on luonnollista tiedustella, seuraako semantiikan määrittelystä heti joitain olettamuksia asenteiden loogisten ominaisuuksien kannalta. Se osoittautuukin hyvin painavaksi tässä suhteessa. Helposti esimerkiksi tulee mieleen kysymys, noudattavatko asenteet jotain "klassista logiikkaa". Voivatko subjektin uskomukset, kuvitelmat jne. olla loogisessa suhteessa millaisia tahansa? Mutta semanttinen määritelmä vastaa tähän heti.

Jos esimerkiksi olisi totta $\mathrm{B}_a A$ ja $\mathrm{B}_a \neg A$, niin kaikissa doksastisissa vaihtoehdoissa olisi totta sekä A että $\neg A$. Näin ei voi olla missään mahdollisessa maailmassa, joten doksastisia vaihtoehtoja ei ole lainkaan. Silloin $\mathrm{B}_a B$ kaikilla B, eli jos subjekti syyllistyy ristiriitaan uskomuksissaan, hän uskoo mitä tahansa. Tämähän on sangen vahva johtopäätös, mutta logiikkamme peruskalusto tuottaa sen välittömästi.

Entä miten käy loogisille totuuksille? Jos A on tautologia, se on tosi kaikissa mahdollisissa maailmoissa ja erityisesti myös kaikissa asennevaihtoehdoissa. Siis myös jokaisen subjektin a jokaiselle asennemodaliteetille A on (välttämättä) totta, että $\mathrm{A}_a A$. Toisaalta syntaksissa päättelysääntö (RN) sanoo, että koska A

on teoreema, niin $\mathrm{A}_a A$ on teoreema. Sama tulos toimii myös iteroituna: näyttää siis olevan välttämätöntä, että a kuulee, että b haistaa monimutkaisimmatkin loogiset tautologiat.

On syytä mainita, että on koetettu kehitellä useita liberaalimpia Kripke-semantiikan muunnelmia, jotka eivät johtaisi suoraan näin radikaaleihin tuloksiin (ks. [9]). Ne ovat kuitenkin paljon monimutkaisempia. Niissä on myös paljon vaikeampaa löytää selvää intuitiivista tulkintaa vaihtoehtorelaatiolle, jolla on perussemantiikassa sentään hyvin ymmärrettävä merkitys. Käytämme seuraavassa tavallista Kripke-semantiikkaa, mutta toteamme, että sen avulla rakennettu propositionaalisten asenteiden logiikka näyttää pakostakin vaativan melkoista idealisointia.

4

Voimme nyt ryhtyä katsomaan kiinnostavia syntaktisia periaatteita, joita voitaisiin tarjota modaaliloogisiksi aksioomiksi propositionaalisia asenteita varten. Etsimme niille semanttiset vastineet, siis mahdollisten maailmojen vaihtoehtorelaatiota koskevat ehdot. Ja sitten tarkastamme, olisiko tulos sovelias kuvaamaan jotain asennetta, josta normaalisti puhumme. Tarkoituksena on saada lausutuksi kustakin asenteesta valaisevia loogisia ominaisuuksia. Mahdollisia ehtoja on tietenkin periaatteessa kuinka paljon tahansa; kiintoisat tapaukset täytyy hakea kokeilemalla. Ja tarjottujen periaatteiden pätevyys eri asenteissa nähdään oivaltamalla, so. filosofisella analyysilla, tai eksplikoimalla, merkityksiä täsmentämällä – harvoin kai formaalisilla todistuksilla.

Merkitsemme asenneoperaattoria $\Box$:lla ja aloitamme yksinkertaisimmista ehdoista.

$$\Box A \to \Diamond A. \tag{1}$$

Tämä aksiooma on validi, jos ja vain jos vaihtoehtorelaatio R on "sarjallinen", toisin sanoen täyttää ehdon

$$\forall w \in W \, \exists w' \in W : wRw'.$$

Näyttää selvältä, että tietäminen ja muut "kognitiiviset" asenteet noudattavat tätä aksioomaa. Jos tietää että A, ei käy päinsä tietää että ei A. Mutta entä uskominen B eri vahvuisena? Tai "ei-väittävät" asenteet kuten kuvitteleminen? Kuitenkin, jos noudatamme Kripke-semantiikkaa, saamme

$$\neg(\Box A \to \Diamond A) \equiv \Box A \wedge \neg\Diamond A \equiv \Box A \wedge \Box\neg A \equiv \Box(A \wedge \neg A).$$

Täten $M, w \nvDash \Box A \to \Diamond A$, jos ja vain jos $M, w \vDash \Box(A \wedge \neg A)$, eikä jälkimmäinen kaava voi olla totta muuten kuin maailmoissa w, joissa $\Box$-asenteita ei ole lainkaan. Aksiooman (1) täytyy siis olla voimassa.

$$\Box A \to A. \tag{2}$$

Kuten aiemmin on todistettu, vastaava semanttinen ehto on vaihtoehtorelaation refleksiivisyys:

$$\forall w \in W : wRw.$$

On selvää, että *tieto* täyttää tämän vaatimuksen, mutta *usko* ei. Tiedot ovat aina tosia, mutta luulot eivät. Tässä on perustava kahtiajako kahdenlaisten asenteiden välillä. Useimpiin nimittäin kuuluu erehtyvyys, toisin kuin tietoon. Voimme pohtia, antaisiko lievempi aksiooma

$$\Box\Box A \to A$$

jotenkin laajemman asenneluokan kuin (2).

Käänteinen ehto olisi

(3) $$A \to \Box A.$$

Sitä vastaa semantiikassa identiteettirelaatio:

$$\forall w\, \forall w' : wRw' \Rightarrow w = w'.$$

Tällainen asennemodaliteetti edellyttää aivan erikoisen subjektin, jolla on asenne jokaista tosiasiaa kohtaan. Mutta filosofian historiassa tämä erikoistapaus on ollut se asennelogiikan sovellutus, joka on aiheuttanut ehkä eniten keskustelua – Jumalan kaikkitietävyys.

Ns. "Brouwerin aksiooma" kuuluu

(4) $$A \to \Box\Diamond A.$$

Sitä vastaava semanttinen ehto on symmetrisyys, ts.

$$\forall w\, \forall w' : wRw' \Rightarrow w'Rw.$$

Tämä aksiooma, jota on usein käytetty modaalilogiikassa, ei näytä soveltuvan tavallisten subjektien propositionaalisiin asenteisiin. Sehän edellyttäisi asennetta jokaisesta tosiasiasta. Olipa A mikä tahansa tosi lause, subjektin pitäisi esimerkiksi uskoa, ettei hän usko sen negaatioon.

Hyvin tunnettu aksiooma on

(5) $$\Box A \to \Box\Box A.$$

Sitä vastaa maailmasemantiikassa transitiivisuus:

$$\forall w\, \forall w'\, \forall w'' : wRw' \wedge w'Rw'' \Rightarrow wRw''.$$

Tämä aksiooma esitettiin asenteiden yhteydessä ensin tietämisen "KK-teesinä": $\mathrm{K}A \to \mathrm{KK}A$. Siitä on käyty paljon kiistaa. Se on tavallaan erikoista: jos tuo lause on teoreema, niin luulisi kaikkien heti tietävän sen, koska kerran myös lause $\mathrm{K}(\mathrm{K}A \to \mathrm{KK}A)$ on silloin teoreema säännön (RN) nojalla. Tästä näkyy, että aksiooman pätevyys riippuu siitä, kuinka idealisoituja subjekteja pyritään tarkastelemaan. Vielä vähemmän vakuuttava aksioomasta tulee heikommilla asenteilla, kuten uskomisen "BB-teesinä". Monilla asenteilla koko iteraatio on ongelmallinen.

Hintikan alkuperäinen K-tietämisen logiikka oli oikeastaan yhtä kuin **S4**. Toisin sanoen sen aksioomat olivat (2) ja (5), ja malli oli refleksiivinen ja transitiivinen. Lenzen tarjosi tietämiselle vahvempaa systeemiä **S4.2**. Se saadaan, kun näihin lisätään vielä ns. ”Geachin aksiooma”:

$$\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A. \tag{6}$$

Tätä vastaa semantiikassa ehto, että R on ”konvergentti”:

$$\forall w_1 \forall w_2 \forall w_3 (w_1 R w_2 \wedge w_1 R w_3 \Rightarrow \exists w_4 \colon w_2 R w_4 \wedge w_3 R w_4).$$

Tällainen aksiooma on jo vaikea tulkita, mutta intuitiivisten merkitysten kannalta se tuskin on hyväksyttävissä: siinähän johdetaan tietoa tietämättömyydestä, tai yleisemmin asenteen esiintyminen asenteen puuttumisesta. Tiedon kohdalla ehto sanoisi: $\neg \mathrm{K} \neg \mathrm{K} A \to \mathrm{K} \neg \mathrm{K} \neg A$. Yksinkertaisin vastaesimerkki on tapaus, jossa henkilö ei tiedä mitään siitä, onko A vai ei. Ei näytä olevan aihetta olettaa, että hänen täytyisi aina olla selvillä kummastakaan tietämättömyydestä.

$$\Box\Box A \to \Box A. \tag{7}$$

Ehdon (2) mukaan on jo selvää, että tieto K toteuttaa tämän aksiooman, mutta voidaan ajatella, että se soveltuisi myös uskomiseen. Jos *uskon uskovani A*, uskonko todella A? Useimmat kai sanoisivat näin. Kysymys on kuitenkin herättänyt jonkin verran filosofista väittelyä, joka osoittaa uskomisen monimielisyyden.

Ns. ”McKinseyn aksiooma” kuuluu:

$$\Box\Diamond A \to \Diamond\Box A. \tag{8}$$

Tällä aksioomalla ei lainkaan ole yksinkertaista semanttista vastinetta, mutta eräs riittävä ehto on:

$$\forall w_1 \exists w_2 \big[w_1 R w_2 \wedge \forall w_3 \forall w_4 \big((w_2 R w_3 \wedge w_2 R w_4) \Rightarrow w_3 = w_4 \big) \big].$$

Tämäkään ei näytä pätevän asenteiden kohdalla. Vastaesimerkki löytyy niistä asioista, joihin subjekti tahallaan on ottamatta lainkaan kantaa (”tästä minä totisesti en luule mitään suuntaan enkä toiseen”).

Kuuluisimpia modaaliaksioomia on

$$\Diamond A \to \Box\Diamond A, \tag{9}$$

tai yhtäpitävästi

$$\neg\Box A \to \Box\neg\Box A.$$

Vastaava semanttinen ehto on, että R on euklidinen, ts.

$$\forall w \, \forall w' \, \forall w'' \colon w R w' \wedge w R w'' \Rightarrow w'' R w'.$$

Kuten ehdon (6) kohdalla, on tässäkin todettava, ettei (9) näytä asenteille vakuuttavalta.

Jos systeemiin **S4** lisätään aksiooma (9), saadaan **S5**, jossa vaihtoehtorelaatio R on ekvivalenssi. Aiemmin on jo todettu, että **S5** on tunnetuin ja semanttisesti yksinkertaisin modaalilogiikka. Se ei kuitenkaan näytä soveltuvan minkään inhimillisen propositionaalisen asenteen esitykseksi. On silti kiintoisaa huomata, että tietojenkäsittelytieteilijät ovat usein käyttäneet juuri sitä (ks. esim. [9, 5]). Tästä näkyy, että tietokoneista puheen ollen ”asennelogiikalla” on hyvin erilaiset intressit kuin inhimillisten subjektien kohdalla.

Ns. ”Löbin aksiooma” kuuluu

(10) $$\Box(\Box A \to A) \to \Box A.$$

Jos $\Box$ tarkoittaa esimerkiksi tietämistä, ehto ei toteudu. Jos $\Box$ luetaan ”on todistettavissa teoriassa T”, ehto tarkoittaa vapaasti suomentaen: jos teoriassa T voidaan todistaa, että kaikki sen teoreemat ovat tosia, niin kaikki voidaan todistaa eli teoria on ristiriitainen. Jos esimerkiksi T on aritmetiikka, niin ehto ilmaisee ns. Gödelin toisen epätäydellisyyslauseen. Tällä operaattorin $\Box$ tulkinnalla ehto siis on voimassa. Kuten näkyy, modaalikäsitteitä voidaan käyttää myös todistuvuutta tutkittaessa. Näistä tarkasteluista onkin tullut tärkeä modaalilogiikan sovellutus (*todistuvuuslogiikka*).

5

Vuonna 1962 Hintikan episteeminen logiikka oli **S4**. Sen aksioomat siis olivat

(T) $$\mathrm{K}A \to A,$$

(K) $$\mathrm{K}(A \to B) \to (\mathrm{K}A \to \mathrm{K}B),$$

ja

(4) $$\mathrm{K}A \to \mathrm{KK}A,$$

ja päättelysäännöt (MP) ja (RN). Uskomisen logiikka oli yksinkertaisella tavalla sitä heikompi: sen aksioomat olivat vain

(K) $$\mathrm{B}(A \to B) \to (\mathrm{B}A \to \mathrm{B}B),$$

ja

(4) $$\mathrm{B}A \to \mathrm{BB}A,$$

Aksiooma (K) esiintyy useimmissa muissakin propositionaalisten asenteiden logiikoissa, ja se on Kripke-semantiikassa aina validi. Se johtaa kuitenkin heti ns. *loogisen kaikkitietävyyden ongelmaan*, joka on asennelogiikan tärkein vaikeus.

Siitä nimittäin johtuu, että subjekti tietää kaikki tietojensa loogiset seuraukset, ja samoin on muiden asenteiden kohdalla. Toisin sanoen, asenteen sisältönä olevien lauseiden joukko on *deduktiivisesti suljettu*. Näin seuraavia asennelauseita on äärettömän paljon. Kaikki tällaiset seuraukset eivät voine olla psykologisesti reaalisia missään normaalissa mielessä, mutta toisaalta lähtökohdaksi oli määrä ottaa nimenomaan psykologisesti reaaliset asenteet. Tämä asenneoperaattorin psykologisen (tai deskriptiivisen) ja loogisen merkityksen yhteensovittaminen on keskeinen periaatteellinen ongelma, johon ei ole annettu täysin tyydyttävää ratkaisua. Vastaukseksi ei riitä sekään ehdotus, että kysymys on normatiivisesta teoriasta, joka kuvaa "loogisesti täydellisen subjektin" asenteita. On nimittäin kiistanalaista, miksi jokin normi vaatisi asenteiden deduktiivista sulkeumaa, ja lisäksi premisseiksi halutaan joka tapauksessa väitteitä todellisista, epätäydellisistä subjekteista. On merkillepantavaa, että ongelma herää jo hyvin yksinkertaisilla loogisilla oletuksilla.

Eräässä mielessä asennelogiikan filosofinen perusongelma liittyy kysymykseen, onko propositionaalinen asenne oikeastaan modaliteetti. Välttämättömyyslause $\Box A$ tai deonttinen lause $\mathrm{O}A$ täytyy ymmärtää lauseen A modalisoinneiksi. Sen sijaan asennelause $\mathrm{A}_a A$ on myös faktuaalinen eli tosiasiaväite subjektista a, ja on erittäin vaikea selittää, kuinka sellaisilla faktuaalisilla väitteillä voi olla loogisia suhteita. Samaan kysymykseen on yhteydessä myös loogisen kaikkitietävyyden ongelma.

Edellisissä aksioomissa on modalisoituna kaavana esiintynyt pelkkä A. Yhden asenteen teoriassa on vaikea keksiä kiintoisia aksioomia tätä monimutkaisemmille kaavoille. Ja äskeisetkään ehdotukset eivät enimmäkseen olleet voimassa. Asia voi käydä antoisammaksi, jos tarkastellaan yhdellä kertaa useita asenteita. Tällainen usean modaliteetin logiikka on kiintoisa alue, mutta myös huomattavasti vaikeampi. Se voi olla hyödyllinen eri asenteiden vertailussa ja myös asenteiden lähemmässä analyysissa, kun esimerkiksi erotetaan asennetermien eri merkityksiä.

Usein aksioomat, jotka koskevat eri operaattoreita sisältävien lauseiden keskinäisiä riippuvuussuhteita, saavat vastineen semanttisten vaihtoehtorelaatioiden vertailussa. Tämä näkökulma antaa mahdollisuuksia käyttää asennelogiikassa algebrallisia menetelmiä, joilla joukon W relaatioita kuvataan.

Esimerkki 4.

$$\models \mathrm{K}A \to \mathrm{B}A \quad \text{joss} \quad R^{\mathrm{B}} \subseteq R^{\mathrm{K}}.$$

Todistus. ($\Rightarrow$) Oletetaan, että $\mathrm{K}A \to \mathrm{B}A$ on validi. Olkoon $\langle w_1, w_2\rangle \in R^{\mathrm{B}}$. Oletetaan, että P on jokin valuaatio, jolla $P(A) = \{\, w' \mid w_1 R^{\mathrm{K}} w' \,\}$. Jos siis on $w_1 R^{\mathrm{K}} w'$, niin valuaatiossa P on $w' \models A$, joten määritelmän mukaan on $w_1 \models \mathrm{K}A$. Koska $\mathrm{K}A \to \mathrm{B}A$ on validi, seuraa päättelysäännön (MP) mukaan, että valuaatiossa P on $w_1 \models \mathrm{B}A$. Tämä merkitsee, että kaikilla $w' \in W$ on voimassa: $w_1 R^{\mathrm{B}} w' \Rightarrow w' \models A$ eli $w' \in P(A)$ eli $w_1 R^{\mathrm{K}} w'$. Näin ollen $\langle w_1, w_2\rangle \in R^{\mathrm{K}}$, eli $R^{\mathrm{B}} \subseteq R^{\mathrm{K}}$.

($\Leftarrow$) Oletetaan, että $R^{\mathrm{B}} \subseteq R^{\mathrm{K}}$. Olkoon $w \in W$ ja $w \models \mathrm{K}A$. Silloin kaikilla w', joilla $w R^{\mathrm{K}} w'$, on $w' \models A$. Oletuksen mukaan siis erityisesti kaikilla w', joilla $w R^{\mathrm{B}} w'$, on $w' \models A$. Siis $w \models \mathrm{B}A$. Näin saadaan $w \models \mathrm{K}A \to \mathrm{B}A$, ja koska w oli mielivaltainen, on $\models \mathrm{K}A \to \mathrm{B}A$. ∎

Joskus asenteiden olennaiset piirteet ovat sellaisia, että niiden ilmaisemiseen tarvitaan useita asenneoperaattoreita.

Esimerkki 5. Tieto on välittyvää, ts.

$$\vdash \mathrm{K}_a\mathrm{K}_b A \to \mathrm{K}_a A.$$

Todistus.

1.	$\mathrm{K}_b A \to A$	aksiooma (T)
2.	$\mathrm{K}_a(\mathrm{K}_b A \to A)$	$1, (RN)$
3.	$\mathrm{K}_a(\mathrm{K}_b A \to A) \to (\mathrm{K}_a\mathrm{K}_b A \to \mathrm{K}_a A)$	aksiooma (K)
4.	$\mathrm{K}_a\mathrm{K}_b A \to \mathrm{K}_a A$	$2, 3, (MP)$.

■

Lause voidaan myös semanttisesti todeta validiksi R^{K}-relaation refleksiivisyyden avulla. Sen sijaan ei ole voimassa

$$\mathrm{B}_a\mathrm{B}_b A \to \mathrm{B}_a A,$$

ei edes

$$\mathrm{K}_a\mathrm{B}_b A \to \mathrm{B}_a A,$$

mutta kylläkin

$$\mathrm{B}_a\mathrm{K}_b A \to \mathrm{B}_a A.$$

Eräs usean modaliteetin systeemin asenneloogiinen sovellutus on asenteiden muutoksen tutkimus. Silloin asenneoperaattoreilla tarkoitetaan esim. uskomuksia hetkillä 1, 2, . . . , n, ja tehtävänä on koettaa kuvata, kuinka lisäinformaation saaminen tai joidenkin käsitysten muuttaminen vaatii muutosta myös joissakin muissa, loogisesti näihin liittyvissä asioissa. Tällainen ”uskomusten korjaamisen teoria” on nykyisin tullut varsin suosituksi tutkimuskohteeksi (ks. esim. [4, 12]).

6

Modaalilogiikka on aina ollut enimmäkseen lauselogiikkaa. Propositionaalisten asenteiden teoriassa lienee kuitenkin predikaattilogiikka antoisin; jännittävien kysymysten saavuttamiseksi tarvitaan kvantifikaatiota. Modaalinen predikaattilogiikka saadaan, kun predikaattilogiikan klassiseen kieleen lisätään modaalisia operaattoreita. Tulos on kuitenkin lauselogiikkaan verrattuna teknisesti paljon vaikeampi, ja siihen liittyy myös filosofisia ongelmia. Ne tulevat erikoisen selvästi esille asennelogiikassa.

Aiemmin on jo viitattu *de re* ja *de dicto* -lauseiden eroon. Modaalisen predikaattilogiikan kielessä saadaan muodostetuksi kahdenmuotoisia lauseita:

$$\exists x \Box Px \quad \text{ja} \quad \Box \exists x Px.$$

Toisin sanoen, kuuluuko kvanttori modaalioperaattorin vaikutusalaan vai päinvastoin? Jos kyseessä on esimerkiksi tieto-operaattori, vastaavilla lauseilla

$\exists x \mathrm{K}_a Px$ ja $\mathrm{K}_a \exists x Px$ on ilmeinen ero. Edellinen sanoo: on jokin sellainen aktuaalinen olio, *josta* subjekti a tietää, että sillä on ominaisuus P. Jälkimmäinen sanoo: a tietää, että on olemassa ainakin jokin sellainen olio, jolla on ominaisuus P (mutta a ei välttämättä tiedä, *mikä* olio se on). Nämä ovat aivan eri asiantiloja. Useinhan ongelmien ratkaiseminen on sitä, että pyritään jälkimmäisestä tilasta edelliseen, siis selvittämään, mikä nimenomainen olio on se, jolla on määrätyt ominaisuudet. Keskiajalta asti on sanottu, että lause

$$\exists x \mathrm{K}_a P(x)$$

on *de re*, ja lause

$$\mathrm{K}_a \exists x P(x)$$

on *de dicto*. Nämä vanhat nimitykset ovat varsin osuvia. Edellisessä tapauksessa tieto on ”oliosta” (että se on tietynlainen), jälkimmäisessä ”dictumista” eli lausesisällöstä (että se pitää paikkansa).

Vastaava ero nähdään myös universaalikvanttoreilla. Lauseesta $\forall x \mathrm{K}_a P(x)$ ei varmaankaan seuraa $\mathrm{K}_a \forall x P(x)$, sillä a ei ehkä tiedä, että kaikki yksilöt tosiaan tulivat käsitellyiksi. Ja monien mielestä lauseesta $\mathrm{K}_a \forall x P(x)$ ei seuraa $\forall x \mathrm{K}_a P(x)$: voidaanko näet sanoa, että $\mathrm{K}_a P(x)$ on totta myös oliosta, joka on a:lle täysin tuntematon? Luonnollisessa kielessä nämä kontrastit ilmenevät paremmin lauseissa, joissa kvantifikaatio on rajoitettu: esimerkiksi ”Kaikkien johtokunnan jäsenten a uskoo olevan epäpäteviä” ja ”a uskoo, että kaikki johtokunnan jäsenet ovat epäpäteviä”. Niiden formalisoinnit olisivat $\forall x\big(Q(x) \to \mathrm{B}_a P(x)\big)$ ja $\mathrm{B}_a \forall x\big(Q(x) \to P(x)\big)$. Selvästi näistä kumpikaan ei implikoi toista. Vastaava jako syntyy myös singulaarilauseissa. Kuten luvussa 5 todettiin, ”Sokrateen a tietää viisaaksi” voi saada eri tulkinnan kuin ”a tietää, että Sokrates on viisas”.

Kun muodostetaan kompleksisia lauseita, joissa on sekaisin *de re*- ja *de dicto*- konteksteja ja ehkä useita subjekteja, tilanne käy pian hyvinkin hankalaksi. *De re*- ja *de dicto* -erottelua käsiteltiin jo modaalisen predikaattilogiikan yhteydessä (luku 5) ja todettiin, että ongelmat johtuvat viime kädessä siitä, että mahdollisilla maailmoilla on omat yksilöjoukkonsa tai universuminsa. Tehtävä olisi helposti hallittavissa, jos kaikilla maailmoilla olisi yksi ja sama universum, mutta ainakaan asennelogiikassa sellainen olettamus ei ole mahdollinen.

Kysymys universumeista jakautuu tavallaan kahtia. Ensinnäkin, mitä ovat kunkin maailman yksilöjoukot? Jossain ajatellussa maailmassa voi nimittäin esiintyä yksilö, jota toisessa ei ole, tai voidaan ajatella, että jokin yksilö puuttuisi. Erityisesti vaikuttaa siltä, että kaikki aktuaalisen maailman oliot eivät ole välttämättömiä eivätkä myöskään kaikki mahdolliset oliot aktuaalisia. Toiseksi, milloin voidaan sanoa, että erään maailman yksilö on *sama* kuin toisen maailman? Kvantifioitu asennelogiikka voi menestyä vain, jos on määritelty jokin tapa *identifioida* eri maailmoissa esiintyviä yksilöitä. On siis voitava sanoa, että jonkin maailmajoukon $S \subseteq W$ kaikissa maailmoissa esiintyy *sama* yksilö c. Formaalisti puhuen, tarvitaan annettu funktio, joka liittää joukon S jokaiseen maailmaan w sen universumista yksilön, joka tulkitaan yksilötermin c ekstensioksi w:ssä.

Ensimmäinen ongelma ratkaistaan yleensä yksinkertaisesti myöntämällä, että maailmoilla on eri universumit, joissa tosin voi olla myös yhteisiä yksilöitä. Toinen kysymys on vaikeampi. Se vaatii mielipidettä yksilöiden samuudesta eri olosuhteissa, ja tästä on tunnetusti vaikea päästä tyydyttävään ratkaisuun – joidenkin mielestä yleispätevää ratkaisua ei edes voi olla. Modaalilogiikassa ongelma tulee vastaan kaikissa *de re* -konteksteissa: mikä on se olio x, josta esitetään modaalinen väite $\Box P(x)$ ja jota siis joudutaan tarkastelemaan eri olosuhteissa?

Asennelogiikassa ongelma on erityisen vaikea, koska siihen liittyy vielä uusi komplikaatio. Asenne voi nimittäin koskea oliota kahdella tavalla. Voi esimerkiksi olla olemassa todellinen olio, josta a:lla on uskomus. Mutta on myös mahdollista, että a:n uskomus koskeekin sellaista yksilöä, jonka hän on itse ajatellut, kuvitellut, luullut havainneensa tai olettanut. Se voi olla olemassa, mutta ehkä sitä ei tosiasiassa olekaan – tämä on a:n asenteelle epäolennaista. Kuitenkin asenne on *de re*, kuten näkyy jo siitäkin, että a:lla voi olla lisää asenteita *samasta* oliosta. – Tämä huomio (Hintikka, Kaplan, Evans) pakottaisi erottamaan kaksi tapaa identifioida yksilöitä, ja siksi se myös pakottaisi ottamaan käyttöön kahdenlaisen kvantifioinnin, siis kumpaakin identifikaatiotapaa varten oman muunnelman. Suomalaiset asenneloogikot ovat askarrelleet paljon tämän ajatuksen parissa (Hintikka, Niiniluoto, Aho).

Esimerkiksi, jos a tietää, että hänellä on pää, on luultavasti totta myös *de re* -lause $\exists x \mathrm{K}_a P(x)$. Mutta jos hän uskoo, että henkiolento puhuu hänelle, on luultavasti epätotta, että $\exists x \mathrm{B}_a P(x)$. Kuitenkin a:n uskomus koskee tiettyä yksilöä. Näiden a:n omasta perspektiivistään kokemien yksilöiden ilmaisemiseen on käytetty toista kvanttoriparia $\boxminus x$, $\mathbb{A}x$. Tapausten ei suinkaan tarvitse olla näin räikeitä. Itse asiassa pelkästään subjektin asenteista puhuttaessa on useimmiten täsmällisintä käyttää juuri perspektiivistä kvantifiointia. Esimerkiksi a:lla saattaa olla käsityksiä havaitsemastaan henkilöstä, vaikka hän ei saa selville, *kuka* on kyseessä. Jossain hänen havaintomaailmassaan nämä hänen käsityksensä ovat siis voimassa b:stä, toisessa c:stä, jne., ja kuitenkin ne koskevat yhtä nimenomaista olentoa – sitä jonka a näki ja joka tulee tällä tavoin identifioiduksi hänen kannaltaan.

Voimme jälleen kutsua identifioivia funktioita *maailmanviivoiksi* (vrt. 5.3) ja päättää, että eräät niistä ovat fysikaalisia, toiset taas subjektin perspektiivistä riippuvaisia. Kun yksilöiden tarjonta on tällä tavoin kiinnitetty, voidaan antaa totuusmääritelmät subjektin a asennetta A koskeville *de re*-lauseille:

> $w \vDash \exists x \mathrm{A}_a P(x)$ joss jokin fysikaalinen maailmanviiva f on sellainen, että $f(w')$ toteuttaa kaavan $P(x)$ kaikissa w', joilla $wR_a^{\mathrm{A}}w'$
>
> $w \vDash \boxminus x \mathrm{A}_a P(x)$ joss a:n ja w:n suhteen on jokin sellainen perspektiivinen maailmanviiva f, että $f(w')$ toteuttaa kaavan $P(x)$ kaikissa w', joilla $wR_a^{\mathrm{A}}w'$.

Sama tekniikka toimii muidenkin lausemuotojen kohdalla.

Voidaan kuitenkin oikeutetusti kysyä, millaisia kyseiset identifikaatiot, maailmanviivat, oikeastaan ovat. Hintikan alkuperäinen ehdotus oli, että fysikaaliset maailmanviivat liittyisivät jatkuvuuteen ja yhtäläisyyteen, perspektiiviset taas subjektin havaintokentän psykologisiin ilmiöihin. (Ks. artikkeleita kokoelmasta Hintikka [7].) Toisaalta, jos eri maailmojen oliot ovat fysikaalisesti identtiset, voivatko ne lainkaan olla eri olioita x ja y eri universumeissa? Toinen ehdotus onkin, että fysikaalinen maailmanviiva yksinkertaisesti poimii objektiivisesti saman yksilön eri maailmoista, kun taas perspektiivinen maailmanviiva määrittelee subjektin maailmankuvassa subjektiivisesti esiintyvät yksilöt. (Esim. Aho [1].)

Esimerkki 6. Lause

$$\exists x \mathrm{K}_a P(x)$$

voitaisiin (joissakin tulkinnoissa) lukea 'a tietää, kuka on P'. Toisaalta

$$\boxminus x \mathrm{K}_a P(x)$$

tulisi lukea 'jonkun a tietää olevan P'.

Seuraavaksi tarvittaisiin laajennusta, joka mahdollistaisi kvantifikaation asennesubjektien yli ("jotkut luulevat..."). Tämäkin tehtävä on ratkaistavissa periaatteessa varsin yksinkertaisesti, mutta se pakottaa mutkistamaan formalismia, joten sivuutamme sen nyt maininnalla.

Asennelogiikan perimmäinen haaste on, että se tuntuu vaativan vielä enemmän kuin tavallinen modaalilogiikka: Intensionaalista ekvivalenssia on voitu onnistuneesti kuvata välttämättömällä ekvivalenssilla, ja aleettisessa modaalilogiikassa vallitseekin substituutioperiaate välttämättä ekvivalenttien elementtien kesken. Propositionaalisista asenteista puheen ollen se sen sijaan ei näytä vallitsevan (ja niinpä niiden logiikkaa on usein sanottu "hyperintensionaaliseksi"). Lauseesta 'a uskoo että $P(x)$' ei tavallisen ymmärryksen mukaan seuraa 'a uskoo että $Q(x)$', vaikka $P(x)$ ja $Q(x)$ olisivat välttämättä ekvivalentit, toisin sanoen vaikka olisi totta $\Box\forall x\big(P(x) \leftrightarrow Q(x)\big)$; lauseesta '$a$ uskoo että $P(b)$' ei seuraa 'a uskoo että $P(c)$', vaikka olisi totta $\Box(b = c)$. Tämä tilanne siis syntyy, kun toisen lauseen modaliteettina on B_a, toisen $\Box$. Ehkä modaliteetit pitäisi yhtenäistää, ja olettaa, että a *uskoo*, että $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat ekvivalentit tai että $b = c$? Yleisesti, pitääkö paikkansa, että jos $\mathrm{A}_a P(x)$ ja $\mathrm{A}_a \forall x\big(P(x) \leftrightarrow Q(x)\big)$, niin $\mathrm{A}_a Q(x)$? Se ajatus voi olla luonnollisen kielen kannalta lupaavampi. Ehdotus on kuitenkin vastoin mahdollisten maailmojen semantiikan keskeistä ideaa, jonka mukaan totuus kaikissa maailmoissa on ankarin totuusehto, joka lauseille voidaan asettaa.

Voimme kaikkiaan todeta, että asennelogiikka ei ole juuri tuottanut mielenkiintoisia loogisia teoreemoja. Sitä vastoin sen ehkä houkuttelevin sovellutus on ollut luonnollisen kielen asennelauseiden rekonstruoiminen eksaktimmalla kielellä, jotta niitä voidaan paremmin vertailla ja niiden hienorakennetta tutkia. Tämä rekonstruktio on usein yllättävän hankalaa, ja siihen tarvitaan kaikkia modaalisen predikaattilogiikan keinoja. Tarjoamme vain pari yksinkertaisinta esimerkkiä näytteeksi:

Esimerkki 7. Lause

$$\exists x\big(x = b \wedge \mathrm{S}_a P(x)\big)$$

voi esittää tilannetta, jota luonnollisessa kielessä kuvattaisiin 'sen olion, joka tosiasiassa on b, a näkee olevan P'.

Lause

$$\mathrm{B}_a \exists x \mathrm{K}_a P(x)$$

voitaisiin lukea 'a uskoo tietävänsä, mikä on P'.

Lause

$$\mathsf{E}x\big(\mathrm{S}_a(x = x) \wedge \mathrm{B}_a P(x)\big)$$

kertoo 'a uskoo näkemänsä olion olevan P'.

Seuraava kolmikko on ehkä valaiseva:

$\mathrm{I}_a \mathsf{E}x \mathrm{S}_b P(x)$ – 'a kuvittelee, että jokin näyttää b:stä olevan P'

$\exists x \mathrm{I}_a \mathrm{S}_b P(x)$ – 'jonkin a kuvittelee olevan b:n silmissä P'

$\mathrm{I}_a \mathrm{S}_b \exists x P(x)$ – 'a kuvittelee, että b:stä näyttää, että on jotain mikä on P'.

Ja vihdoin lause

$$\mathsf{A}x\big(\mathsf{E}y \mathrm{S}_a(y = x) \rightarrow \mathrm{K}_a \mathsf{E}y \mathrm{S}_a(y = x)\big)$$

saattaa esittää lauseen 'a tietää mitä näkee' vaatimattominta tulkintaa "jos jokin perspektiivinen olio esiintyy a:n näkökentässä, hän myös tietää tämän".

Kirjallisuutta

[1] Aho, T., "Perspectival Representation", kirjassa O. Majer (ed.), *Topics in Conceptual Analysis and Modelling*, Prague 2000.

[2] Boh, Ivan, *Epistemic Logic in the Later Middle Ages*, Routledge, London 1993.

[3] Fagin, R. & Halpern, J. Y. & Moses, Y. & Vardi, M. Y., *Reasoning about Knowledge*, MIT Press, Cambridge Mass. 1995.

[4] Gärdenfors, Peter, *Knowledge in Flux*, MIT Press, Cambridge Mass. 1988.

[5] Halpern, J. Y. (ed.), *Theoretical Aspectis of Reasoning about Knowledge*, Morgan Kaufmann, Los Altos 1986.

[6] Hintikka, J., *Knowledge and Belief: an Introduction to the Logic of the Two Notions.* Cornell University Press, Ithaca, N.Y., 1962.

[7] Hintikka, J., *The Intentions of Intentionality and Other New Models for Modalities*, Reidel, Dordrecht 1975.

[8] Koons, Robert, "A Representational Account of Mutual Beliefs", *Synthese* 81, 1989.

[9] Meyer, J.-J. C., ”Epistemic Logic”, kirjassa L. Goble (ed.), *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, Blackwell, Oxford 2001.

[10] Meyer, J.-J. C. & van der Hoek, W., *Epistemic Logic for AI and Computer Science*, Cambridge University Press, 1995.

[11] von Wright, G. H., *An Essay in modal Logic*. North-Holland, Amsterdam, 1951.

[12] Williams, Mary-Ann & Rott, Hans (eds.), *Frontiers in Belief Revision*, Kluwer, Dordrecht 2001.