Monisteen Rantala & Virtanen, Logiikkaa: teoriaa ja sovelluksia harjoitustehtävät.

Tehtäviä on osittain muokattu, jotta ne vastaisivat paremmin kokeilumonistetta Rantala & Virtanen, Logiikan peruskurssi. Viittaukset lukuihin 1, 2 ja 3 tarkoittavat kokeilumonistetta. Todistusteoriasta ei ole tehtäviä.

Tehtäviä lukuun 1

1. Anna esimerkki (pätevästä) päätelmästä, jossa todesta ja epätodesta premississtä seuraa epätosi johtopäätös.

2. Anna esimerkki (pätevästä) päätelmästä, jossa epätosista premisseistä seuraa tosi johtopäätös.

3. Anna esimerkki epätäydellisestä eli käytännöllisestä päättelystä. Täydennä kyseinen päättely lisäämällä siihen puuttuvat premissit.

4. Keksi jokin esimerkki (mielestäsi) pätevästä päättelystä. Esitä tämän päättelyn looginen rakenne. Esitä esimerkkejä muista päättelyistä, joilla on tämä sama rakenne.

5. Anna esimerkki päättelystä, joka tuntuu pätevältä, mutta joka tarkemmassa analyysissa osoittautuu kuitenkin epäpäteväksi.

6. Anna esimerkki induktiivisesta päättelystä.

7. Anna esimerkki sellaisesta päättelystä, jossa puhutaan todennäköisyyksistä, mutta joka ei ole induktiivinen vaan deduktiivinen.

8. *Praktisella syllogismilla* tarkoitetaan seuraavanlaista päätelmää (ks. Niiniluoto, Tieteellinen päättely ja selittäminen, s. 305):

a tavoittelee T:tä.
a uskoo, että K on hyvä keino T:n saavuttamiseksi.
Siis: a ryhtyy tekemään K:ta.

Anna jokin konkreettinen esimerkki praktisesta syllogismista.

9. Esitä S. Albert Kivisen KT-syllogismin ('keltaisten tomaattien syllogismi') looginen rakenne:

On keltaisia tomaatteja.
Kaikki keltaiset tomaatit ovat tomaatteja.
Siis: on tomaatteja.

Anna muita esimerkkejä KT-syllogismista.

10. Edellisen tehtävän KT-syllogismi voidaan esittää lyhyesti muodossa 'jos on keltaisia tomaatteja, niin on tomaatteja'. Ovatko seuraavat S. Albert Kivisen tarkastelemat lauseet esimerkkejä KT-syllogismista? Mitä voidaan sanoa niiden pätevyydestä?

a) *Jos on sinisiä tomaatteja, niin on tomaatteja.*
b) *Jos on entisiä pääministereitä, niin on pääministereitä.*
c) *Jos on Brockenin kummituksia, niin on kummituksia.*

11. Millä seuraavista luonnollisen kielen ilmauksista on totuusarvo (aktuaalisessa maailmassa)?

a) Olisipa logiikan peruskurssi jo ohi!
b) Valkoviini sopii kalan kanssa, punaviini lihan kanssa.
c) Älä lunttaa logiikan välikokeessa!
d) Logiikan välikokeissa ei saa luntata.
e) Miten on mahdollista, ettet päässyt logiikan tentistä läpi?
f) Linnunradan ulkopuolellakin tutkitaan logiikkaa.
g) On olemassa olioita, joiden olemassaoloa kukaan ihminen ei voi tietää.
h) Yllä oleva lause on epätosi.
i) Alla oleva lause on tosi.
j) Yllä oleva lause on epätosi.
k) Hän on täällä tänään.
l) Yksisarvisilla on vain yksi sarvi.
m) Jos kenguruilla ei olisi häntää, niin ne kellahtaisivat nurin.
n) Jos $1 + 1 = 3$, niin Kuu on juustoa.

12. Pohdi, voiko olla sellaisia lauseita A ja B, joiden totuusarvot ovat samat jokaisessa loogisesti mahdollisessa maailmassa, vaikka lauseilla A ja B on intuitiivisesti eri merkitys.

13. Anna esimerkki (luonnollisen kielen) lauseesta, joka tuntuu välttämättä todelta aktuaalisen maailmamme näkökulmasta, mutta joka ei ole loogisesti tosi. (Looginen totuus voidaan tässä yhteydessä määritellä totuudeksi, joka määräytyy pelkästä lauseen muodosta.)

14. Anna esimerkki lauseesta, joka ei koskaan voi olla tosi meidän aktuaalisessa maailmassamme, mutta joka kuitenkin on loogisesti mahdollinen eli tosi jossakin loogisesti mahdollisessa maailmassa).

15. Anna esimerkkejä yhteensopimattomista lauseista A ja B eli lauseista, joiden konjunktio $A \wedge B$ on mahdoton. Yksi vastaus olisi lauseet A ja $\neg A$, mutta yritä löytää myös sellaiset yhteensopimattomat lauseet, että ne kumpikin ovat epätosia jossakin maailmassa.

16. Jos B on A:n looginen seuraus, voidaan sanoa, että A sallii vähemmän maailmoja kuin B. Havainnollista tätä esimerkkilauseilla.

Tehtäviä lukuun 2

17. Anna esimerkkejä tilanteista, joissa luonnollisessa kielessä konjunktion 'ja' totuusehdot eivät konnektiivin $\wedge$ totuustaulua.

18. Anna esimerkki luonnollisen kielen lauseesta, jossa on aidosti epäselvää, onko siinä esiintyvän konnektiivin 'tai' merkitys eksklusiivinen vai inklusiivinen.

19. Onko lauseessa

Pekka näki Liisan tai Maijan laskuvarjon aukeavan

esiintyvä 'tai' inklusiivinen, eksklusiivinen tai mahdollisesti jotain muuta?

20. Esitä luonnollisen kielen ilmauksia, jotka vastaavat ilmausta 'jos, ja vain jos'.

21. Yritä keksiä totuustaulut seuraaville 'konnektiiveille':
a) joko A tai B b) A, muttei B c) sekä A että B d) A, kun B
e) A vain silloin kun B f) ei A eikä B

22. Yritä keksiä totuustaulut seuraaville 'konnektiiveille':
a) A, ellei B b) A, paitsi jos B

23. Osoita, että merkkijono $(((p_1 \to p_1) \wedge \neg p_2) \leftrightarrow \neg p_2)$ on kaava.

24. Oletetaan, että A ja B ovat lauselogiikan kaavoja. Tutki, mitkä seuraavista merkkijonoista ovat lauselogiikan kaavoja.
a)$A \Rightarrow B$ b) $(A \vee B) \to (\neg B \wedge A)$ c) $w \models (A \to B)$
d) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ e) $(\neg\neg\neg\neg\neg\neg\neg A \wedge B)$ f) $(\neg A \wedge \wedge \wedge \wedge B)$

25. Onko mahdollista, että jossakin tarkastelussa objekti- ja metakieli ovat samoja?

26. Joukko filosofeja viettää iltaa. Koko illan filosofi A esittää toisten mielestä vääriä väitteitä ns. valehtelijan paradoksin syntyhistoriasta. Illan lopuksi A myöntääkin: 'Kaikki, mitä tämän illan aikana olen sanonut, on valhetta.'

Millainen paradoksi tällöin syntyy? Miten objekti- ja metakielen välistä eroa voisi soveltaa tilanteeseen?

27. Poista seuraavista kaavoista 'turhat' sulut ja muodosta näin saatujen kaavojen rakennepuut.
a) $(\neg p \wedge q)$ b) $\neg(p \wedge q)$ c) $(\neg p \to (\neg p \vee q))$ d) $((\neg p \to \neg q) \vee q)$
e) $(p \wedge (q \vee r))$ f) $((p \wedge q) \vee r)$

28. Muodosta kaavan $((\neg\neg\neg A \vee B) \vee (B \vee C))$ rakennepuu. Poista kaavasta 'turhat' sulut.

29. Yritä formalisoida seuraavat lauseet lauselogiikan kielessä siten, että lauseiden looginen rakenne tulisi mahdollisimman hyvin esiin.
a) Sekä Pekka että Maija ovat kotona.
b) Menen ulos, ellei sada.
c) Logiikan peruskurssin voi suorittaa välikokeilla tai lopputentillä.
d) Logiikan peruskurssin läpäisemiseksi riittää hyvä menestys lopputentissä.
e) Logiikan oppimiseksi on välttämätöntä tehdä harjoitustehtäviä.
f) Harjoitushyvityksen saa, jos tekee harjoitustehtäviä.

30. Mitä vaikeuksia tulee eteen, jos yrittää formalisoida lauselogiikassa seuraavia lauseita?
a) Jos Pekka on poikamies, niin hän ei ole naimisissa.
b) Jos Pekka tietää, että Maija on kotona, niin Maija on kotona.
c) Jos on mahdollista, että Maija ei ole kotona, niin ei ole välttämätöntä että Maija on kotona.
d) Jos Sokrates on ihminen ja jokainen ihminen on kuolevainen, niin Sokrates on kuolevainen.

31. Tampereen yliopiston ravintolan henkilökuntapuolella oli aikoinaan ilmoitus: 'Lounaan hintaan sisältyy kahvi tai jälkiruoka'. Merkitään

p: 'Lounaan hintaan sisältyy kahvi',
q: 'Lounaan hintaan sisältyy jälkiruoka'.

Formalisointi $p \vee q$ ei vastaa ilmoituksen aiottua sisältöä, vaan paras formalisointi on selvästi $p \underline{\vee} q$, jossa $\underline{\vee}$ on eksklusiivinen (poissulkeva) disjunktio.

Jossain vaiheessa ilmoituksen sanamuoto oli seuraava: 'Lounaan hintaan sisältyy kahvi tai jälkiruoka tai hedelmä'. Merkitään

r: 'Lounaan hintaan sisältyy hedelmä'.

Formalisointi $p \vee (q \vee r)$ on tietenkin täysin epäonnistunut. Osoita, että myöskään formalisointi $p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r)$ ei ole erityisen onnistunut.

Esitä sitten jokin sellainen formalisointi, joka mahdollisemman hyvin vastaa ilmoituksen sisältöä.

32. Muodosta lauseen $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \to B) \to C)$ koko totuustaulu.

33. Tiedetään, että (klassisessa) maailmassa w lause A on tosi ja B on epätosi. Sen sijaan lauseen C totuusarvoa ei tiedetä. Mitä voidaan päätellä seuraavien lauseiden totuusarvosta maailmassa w?
a) $A \to (B \vee \neg B)$ b) $\neg(\neg A \to B)$ c) $A \to C$ d) $B \to C$
e) $(B \leftrightarrow C) \vee (A \leftrightarrow C)$ f) $\neg(A \to (\neg C \wedge \neg B))$

34. Olkoon w klassinen mahdollinen maailma. Jos tiedetään, että implikaatio $A \to (B \to (C \to D))$ on epätosi maailamssa w, niin mitä voidaan sanoa lauseiden A, B, C ja D totuusarvoista maailmassa w.

35. Olkoon w klassinen maailma ja A sekä B sellaisia lauseita, että A on tosi ja B epätosi maailmassa w. Ovatko seuraavat lauseet tosia vai epätosia maailmassa u?
a) $\neg A \to A$ b) $A \wedge (\neg A \vee \neg B)$ c) $A \to (A \to B)$
d) $\neg\neg A \wedge \neg\neg\neg\neg B$ e) $A \vee B \to B$ f) $A \leftrightarrow ((A \leftrightarrow B) \to B)$

36. Olkoon w klassinen maailma ja A sellainen lause, jonka tiedetään olevan tosi maailmassa u. Mitä voidaan sanoa seuraavien lauseiden totuusarvosta maailmassa w? (Lauseiden B ja C totuusarvoa maailmassa w ei siis tiedetä.)
a) $\neg A \wedge (B \vee C)$ b) $B \to A$ c) $A \to B$ d) $A \to (B \vee A)$
e) $A \to (B \wedge \neg B)$ f) $B \to (C \to B)$

37. Todista tautologiaksi T_1 ja T_2.

38. Todista tautologiaksi T_5 ja T_8.

39. Todista tautologiaksi T_6 ja T_7.

40. Todista tautologiaksi T_9 ja T_{10}.

41. Tutki, päteekö ekvivalenssille liitännäisyys.

42. Osoita, että mikään seuraavista lauseista ei ole tautologia.
a) $(A \to B) \leftrightarrow (B \to A)$ b) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \to \neg B)$
c) $(A \to B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$ d) $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

43. Tutki, mitkä seuraavista lauseista ovat tautologioita.
a) $A \vee B \to B$ b) $A \to A \vee B$ c) $A \to A \wedge B$ d) $A \wedge B \to A$

44. Tutki, mitkä seuraavista lauseista ovat tautologioita.
a) $(A \to B) \to (A \leftrightarrow B)$ b) $(A \leftrightarrow B) \to (A \to B)$

45. Tutki lauseita $p \to (q \to p)$ ja $\neg p \to (p \to q)$ totuustaulun avulla. (Näitä lauseita on kutsuttu implikaation paradokseiksi. Mikähän on syy tähän nimitykseen?)

46. Tutki seuraavien lauseiden totuustauluja ja vertaa niitä lauseen $(A \leftrightarrow B)$ totuustauluun.
a) $\neg A \leftrightarrow \neg B$ b) $(A \to B) \wedge (B \to A)$ c) $(A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B)$.

47. Osoita seuraavat lauseet tautologioiksi.
a) $A \vee B \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ b) $(A \to B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
c) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg A))$
Tehtävän tulos osoittaa, että peruskonnektiiveiksi riittäisi valita negaatio ja konjunktio. Muut konnektiivit voidaan sitten määritellä yllä olevalla tavalla. (Siis $A \vee B =_{DF} \neg(\neg A \wedge \neg B)$ jne.)

48. Peruskonnektiiveiksi voisi valita negaation $\neg$ ja disjunktion $\vee$. Perustele osa tästä väitteestä osoittamalla seuraavat lauseet tautologioiksi.
a) $A \wedge B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ b) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

49. Edellisen tehtävän perusteella konjunktio ja implikaatio voidaan määritellä negaation ja disjunktion avulla. Osoita, että myös ekvivalenssi voidaan määritellä konnektiivien $\neg$ ja $\vee$ avulla.

50. Henkilöistä A, B, C ja D kolme puhuu aina totta, yksi valehtelee silloin tällöin. Heiltä kysytään millainen sää oli Tampereen keskustorilla eräänä tiettynä päivänä klo 12.00. He vastaavat seuraavasti:
A: 'Satoi tai oli kylmä'
B: 'Satoi tai ei ollut kylmä'
C: 'Ei satanut'
D: 'Jos ei ollut kylmä tai ei satanut, niin satoi mutta ei ollut kylmä'
Voiko tästä keskustelusta päätellä, kuka valehtelee?

51. Olkoon M_1 malli, jossa atomilauseista vain p, q, r ovat tosia, M_2 malli, jossa ainoa tosi atomilause on p ja M_3 malli, jossa kaikki atomilauseet ovat epätosia. Tutki lauseen

$$(\neg r \vee q) \leftrightarrow (p \to r)$$

totuutta näissä malleissa.

52. Anna esimerkki lauseesta, joka on tosi malleissa, joissa mikään atomilause ei ole tosi tai joissa atomilauseet p, q, r, s ovat tosia, mutta epätosi malleissa, joissa korkeintaan kaksi atomilauseista p, q, r, s on tosia.

53. Tutki ovatko seuraavat lauseet loogisesti tosia. Jos lause ei ole loogisesti tosi, niin anna esimerkki mallista M, missä lause on epätosi. Onko joku lauseista loogisesti epätosi?
a) $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$ b) $p \vee (q \vee \neg p)$ c) $(p \to p) \to q$ d) $p \to (q \to p)$
e) $p \wedge \neg p$ f) $p \to (q \to (r \to p))$.

54. Tutki mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia.
a) $p, q, r \models p$ b) $p \vee q \models p$ c) $q, \neg q, \neg p \models p$ d) $p, p \to q \models q$
e) $q, p \to q \models p$ f) $q \models p \to q$

55. Todista seuraavat väitteet.
a) $A \wedge B \models A$ b) $A,\ B \models A \wedge B$

56. Todista seuraavat väitteet.
a) $A \models A \vee B$ b) $A \vee B,\ A \to C,\ B \to C \models C$

57. Todista seuraavat väitteet.
a) $A \leftrightarrow B,\ A \models B$ b) $A \to B,\ B \to A \models A \leftrightarrow B$

58. Perustele seuraava väite.

Jos $A \models C$ ja $B \models C$, niin $A \vee B \models C$

59. Perustele seuraava väite.

Jos $A,\ B \models C$, niin $A \models B \to C$

60. Logiikassa määritellään usein kaksi loogista vakiota: $\top$ (verum), joka on aina tosi (eli jokaisessa mallissa $M \models \top$ ja totuustaulussa sillä on aina arvo t), ja $\bot$ (falsum), joka on aina epätosi. Tällöin siis $p \vee \neg p \equiv \top$ ja $p \wedge \neg p \equiv \bot$. Todista seuraavat loogiset ekvivalenttisuudet (joko totuustaululla tai mallien avulla).
a) $p \wedge \top \equiv p$ b) $p \vee \top \equiv \top$ c) $p \wedge \bot \equiv \bot$ d) $p \vee \bot \equiv p$
e) $p \to \bot \equiv \neg p$ f) $\bot \to q \equiv \top$ g) $p \to \top \equiv \top$ h) $\top \to q \equiv q$

61. Olkoot A, B ja C seuraavat lauseet:

A: *Jos ulkona sataa, niin aurinko ei paista.*
B: *Aurinko paistaa.*
C: *Ulkona ei sada.*

a) Formalisoi lauselogiikassa nämä lauseet.
b) Osoita, että lause C on lauseiden A ja B looginen seuraus.
c) Osoita, että lause B ei ole lauseiden A ja C looginen seuraus.

62. Tutki lauselogiikan avulla, onko seuraava päättely pätevä (eli onko johtopäätös premissien looginen seuraus).

Jos valtiovarainministeri näkee nälkää, niin hänen rahansa ovat loppu ja jääkaappinsa tyhjä.
Valtiovarainministerin rahat eivät ole loppu.

Siis: Valtiovarainministeri ei näe nälkää.

63. Tutki lauselogiikan avulla, onko seuraava päättely pätevä

Jos valtiovarainministerin rahat ovat loppu ja jääkaappi tyhjä, niin hän näkee nälkää
Valtiovarainministerin rahat eivät ole loppu.

Siis: Valtiovarainministeri ei näe nälkää.

64. Arvioi seuraavan päättelyn pätevyyttä tutkimalla, onko johtopäätös premissien looginen seuraus lauselogiikassa.

Joko Matti tai Maija nimitetään yliassistentiksi.
Jos Maija on pätevämpi kuin Matti, niin Maija nimitetään yliassistentiksi.
Maija on pätevämpi kuin Matti.

Siis: Mattia ei nimitetä yliassistentiksi.

Tehtäviä lukuun 3

Formalisoi tehtävissä 65–80 olevat lauseet predikaattilogiikassa.

65. *Platon ja Aristoteles ovat filosofeja. Russell on filosofi ja loogikko.*

66. *Maiju Lassila, Irmari Rantamala ja Algot Untola ovat sama henkilö.*

67. *Kaikki pallot ovat pyöreitä ja kaikki punaiset pallot ovat punaisia.*

68. *Jokin pallo ei ole punainen; mikään sininen pallo ei ole punainen.*

69. *Kaikki pallot ovat sinisiä tai punaisia; ei ole niin, että on muunkin värisiä palloja kuin vain punaisia ja sinisiä.*

70. *Jos Maija rakastaa Pekkaa ja Mattia, niin Maija rakastaa jotakuta ja joku rakastaa sekä Pekkaa että Mattia.*

71. *Jos joku rakastaa jokaista, niin jokainen on jonkun rakastama.*

72. *Jos Pekka vihaa jokaista miestä, jota Maija rakastaa, niin erästä miestä Pekka vihaa ja Maija rakastaa.*

73. *Matti ei rakasta ketään paitsi itseään, Pekka ei rakasta ketään ja vihaa itseäänkin.*

74. *Matilla on lapsi, mutta Matilla ja Maijalla ei ole yhteisiä lapsia.*

75. *Pekka on Matin ja Maijan lapsi, Maiju ja Kalle taasen Pekan ja Liisan lapsia.*

76. *Matilla ja Maijalla ei ole muita lapsia kuin Pekka, jolla ei Liisan kanssa ole muita lapsia kuin Maiju ja Kalle.*

77. *Matin ja Maijan lapset ovat poikia.*

78. *Pekkaa lukuunottamatta Matin ja Maijan lapset ovat tyttöjä.*

79. *Matilla ja Maijalla on täsmälleen kaksi lasta.*

80. *Kaikki, mikä on kiellettyä, ei ole sallittua, mutta kaikki, mikä ei ole kiellettyä, ei ole sallittua.*

81. Esitä käyttämällä predikaatteja $I(x, y)$ (x on y:n isä), $\ddot{A}(x, y)$ (x on y:n äiti) ja $N(x, y)$ (x on nuorempi kuin y) sekä vakioita h (Hilma), p (Pekka), m (Matti) ja l (Liisa) predikaattilogiikan lauseet, jotka mahdollisimman hyvin vastaavat merkitykseltään alla olevia lauseita.

Pekka ja Liisa ovat yhtä vanhoja. Pekan isoisän äiti on Hilma.
Liisa ei ole Matin ainoa lapsi. Liisa on vanhin Matin lapsista.

82. (Tehtävä liittyy ns. Goodmanin paradoksiin, jota on käsitelty esim. kirjassa Niiniluoto: Tieteellinen päättely ja selittäminen, ss. 108–110.) Määritellään ominaisuus 'puhreus' seuraavasti: jokin esine/olio on puhrea, jos ja vain jos 1) sen väri on tutkittu ennen 1.1.2000 ja se on vihreä tai 2) sen väriä ei ole tutkittu ennen 1.1.2000 ja se ei ole vihreä.

a) Esitä yllä oleva määritelmä predikaattilogiikan kielellä käyttämällä seuraavia predikaattisymboleja
$V(x)$: 'x on vihreä'
$T(x)$: 'x:n väri on tutkittu ennen 1.1.2000'
$P(x)$: 'x on puhrea'.

b) Olkoon lisäksi käytössä predikaattisymboli S, jonka merkitys on seuraava: $S(x)$: 'x on smaragdi'. Etsi jokin sellainen predikaattilogiikan lause, jossa ei esiinny muita predikaattisymboleja kuin T, P ja S (vihreyttä ei saa siis käyttää) ja jonka merkitys on mahdollisemman lähellä luonnollisen kielen lausetta 'Kaikki smaragdit ovat vihreitä'.

83. Etsi lauseen $\neg\exists x(\neg\, x = a \vee x = b)$ puurakenne.

84. Etsi lauseen

$$\forall x \forall y (\forall z R(x, y, z) \rightarrow \neg\exists x P(x))$$

puurakenne. Mitkä ovat tässä lauseessa esiintyvät atomikaavat?

85. Etsi lauseen

$$\exists x \exists y \Big(\big(\neg\, x = y \wedge (P(x) \wedge P(y)) \big) \wedge \forall z (P(z) \to z = x \vee z = y) \Big)$$

puurakenne. Mitkä ovat tässä lauseessa esiintyvät atomikaavat? Mikä on tämän lauseen intuitiivinen merkitys?

86. Mitkä seuraavista lauseista ovat tautologioita, mitkä loogisesti tosia? (Huomaa, että vain lauselogiikassa jokainen loogisesti tosi lause on myös tautologia.)

a) $\forall x P(x) \vee \neg \forall x P(x)$	b) $\forall x P(x) \vee \exists x \neg P(x)$	c) $\forall x P(x) \vee \neg \exists x P(x)$
d) $\forall x (P(x) \vee \neg P(x))$	e) $a = b \to a = b$	f) $a = b \to b = a$
g) $a \neq b$	h) $a = a$	i) $a = b \;\vee\; a \neq b$

87. Tutki, onko lause

$$\big(\forall x P(x) \to P(a)\big) \to \Big(\big(P(a) \to \exists y P(y)\big) \to \big(\neg \exists y P(y) \to \neg \forall x P(x)\big) \Big)$$

tautologia.

88. Mitkä seuraavista kaavoista ovat tautologioita.
a) $\neg R(a,b) \vee R(b,a) \leftrightarrow \neg(\neg\neg R(a,b) \wedge R(b,a))$
b) $\neg R(a,b) \vee R(b,a) \leftrightarrow \neg(R(a,b) \wedge \neg R(b,a))$
c) $\forall x R(x,x) \vee \exists y \neg R(y,y) \leftrightarrow (\neg \forall x R(x,x) \to \exists y \neg R(y,y))$

89. Siirrä negaatiomerkkiä niin, että se esiintyy vain atomikaavojen edessä:
a) $\neg \forall x \exists y \forall z \exists u R(x,y,z,u)$ b) $\neg \forall x \neg \exists y \neg \forall z (P(x,y,z) \vee \neg R(x,y))$

90. Todista muodostamalla sellainen ekvivalenssiketju, jossa jokainen askel on 'riittävästi' perusteltu:
a) $\neg \forall x (P(x) \to R(x)) \equiv \exists x (P(x) \wedge \neg R(x))$
b) $\forall x (\neg P(x) \to \neg R(x)) \equiv \neg \exists x (\neg P(x) \wedge R(x))$
c) $\neg \forall x (P(x) \wedge \neg Q(x)) \equiv \exists x (\neg P(x) \vee Q(x))$

91. Esitä lause $\neg \forall x \forall y \exists z \Big((R(x,y) \wedge P(z)) \vee \neg Q(x,y,z) \Big)$ loogisesti ekvivalentissa muodossa, jossa negaatio esiintyy vain atomikaavojen edessä.

92. Osoita esittämällä välivaiheet, että

$$\neg\neg\neg(\forall x \neg P(x) \wedge \neg \exists y \neg\neg Q(y)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists y Q(y).$$

93. Onko mahdollista esittää lause $\neg(\forall x P(x) \to \exists x \neg P(x))$ loogisesti ekvivalentissa muodossa, jossa ei esiinny negaatiota?

94. Etsi seuraavalle lauseelle mahdollisimman yksinkertainen, loogisesti ekvivalentti esitys:

$$\neg \forall z \neg \exists y \neg \exists x (x \neq y \wedge y = y)$$

95. Etsi seuraavalle lauseelle yksinkertaisempi, loogisesti ekvivalentti esitys:

$$\forall y Q(y) \vee \exists y \neg Q(y) \to \exists x \neg\neg P(x) \vee (\neg \forall x \neg P(x) \wedge \exists x P(x)).$$

Vihje: käyttämällä lauselogiikkaa riittävästi apuna on mahdollista löytää vastaus, jossa on vain 6 merkkiä.

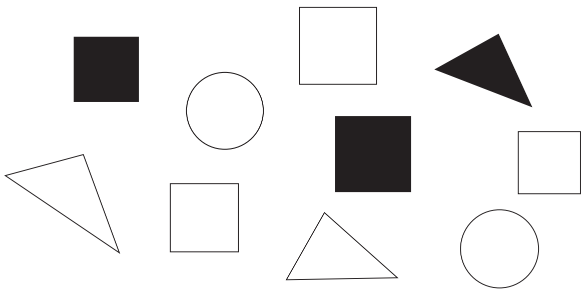
96. Tutki, mitkä muuttujien esiintymät ovat vapaita, mitkä sidottuja seuraavassa kaavassa.

$$\forall x \Big(\forall y \forall z R(x,z) \to (x = y \to R(y,z)) \Big)$$

97. Mitkä seuraavista kaavoista ovat lauseita (eli suljettuja kaavoja)?

a) $\forall x(x = a) \to b = a$	b) $\forall x(y = a \to a = b)$
c) $\forall x(a = a) \vee \exists y \neg y = a$	d) $a = b \wedge b = c \to a = c$
e) $\forall x(a = a) \vee \exists x \neg y = a$	f) $x = y \wedge y = z \to x = z$

98. Esitä vähintään kolme lausetta, jotka eivät ole loogisesti tosia tai epätosia, joiden edessä ei esiinny negaatiota ja jotka ovat a) tosia b) epätosia alla olevan kuvan mukaisessa tilanteessa. Käytä seuraavia predikaatteja:
$Mus(x)$ (x on musta), $Val(x)$, (x on valkoinen), $Nel(x)$ (x on neliö), $Kol(x)$ (x on kolmio), $Ymp(x)$ (x on ympyrä).



99. Esitä edellisen tehtävän kuvaa vastaava malli joukko-opillisesti (kuviot pitää ensin nimetä sopivalla tavalla).

100. Piirrä kuva, jossa lause

$$\forall x(Val(x) \to Kol(x)) \wedge \forall x(Nel(x) \to Mus(x))$$

on tosi. (Vrt. teht. 98.)

101. Piirrä kuva, jossa lause $\forall x(Mus(x) \leftrightarrow \neg Nel(x))$ on tosi. (Vrt. teht. 98.)

102. Piirrä kuva, jossa lauseet $\exists x Mus(x)$, $\forall x(Val(x) \vee Kol(x) \vee Nel(x))$, $\exists x(Kol(x) \wedge Val(x))$ ja $\forall x(Nel(x) \to Mus(x))$ ovat tosia. (Vrt. teht. 98.)

103. Piirrä kuva, joka osoittaa päättelyn

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(Ymp(x) \to Mus(x)) \\ \forall x(Val(x) \to Nel(x))\end{array}}{\forall x(Nel(x) \to \neg Mus(x))}$$

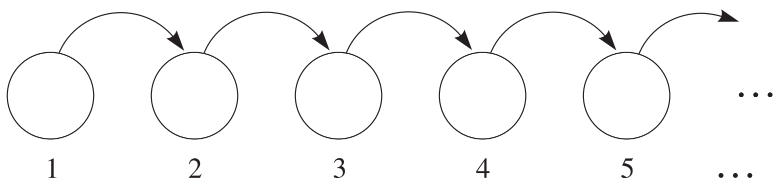
epäpäteväksi (eli kuva, jonka esittämässä tilanteessa premissit ovat tosia, mutta johtopäätös epätosi). (Vrt. teht. 98.)

104. Piirrä kuva, jossa lauseet $\neg\exists x(Mus(x) \to Nel(x))$, $\neg\exists x Kol(x)$ ja $\neg\forall x\forall y(Ymp(x) \wedge Ymp(y) \to x = y)$ ovat tosia. (Vrt. teht. 98)

105. Tutki lauseiden

$$\begin{aligned}
&A = \forall x\exists y\, Nuoli(x, y)\\
&B = \forall x\forall y\forall z(Nuoli(x, y) \wedge Nuoli(x, z) \to y = z)\\
&C = \forall y\exists x\, Nuoli(x, y)\\
&D = \forall x\forall y\forall z(Nuoli(y, x) \wedge Nuoli(z, x) \to y = z)
\end{aligned}$$

totuutta alla olevan kuvan mukaisessa tilanteessa.



106. Piirrä digraafi, jossa edellisen harjoituksen lauseet A, B, C ja D ovat tosia ja jossa lisäksi myös lause $\forall x\neg Nuoli(x, x)$ on tosi.

107. Piirrä digraafi, jossa lauseet

$$\begin{aligned}
&\forall x\, Nuoli(x, x),\\
&\forall x\forall y(Nuoli(x, y) \to Nuoli(y, x)),\\
&\forall x\forall y\forall z(Nuoli(x, y) \wedge Nuoli(y, z) \to Nuoli(x, z)),\\
&Nuoli(a, b),\ \ Nuoli(b, c)\ \text{ ja}\\
&\exists x\exists y\neg Nuoli(x, y)
\end{aligned}$$

ovat tosia.

108. Piirrä digraafi, joka osoittaa päättelyn

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\forall y(Nuoli(x, y) \to Nuoli(y, x))\\ \forall x\forall y\forall z(Nuoli(x, y) \wedge Nuoli(y, z) \to Nuoli(x, z))\end{array}}{\forall x\, Nuoli(x, x) \vee \forall x\neg Nuoli(x, x)}$$

epäpäteväksi.

109. Viisi loogikkoa A, B, C, D ja E keskustelevat näkemästään taulusta, jonka maalannut taiteilija on kuuluisa siitä, että hänen tauluissaan ei esiinny koskaan mitään muuta kuin ehkä joitain valkoisia ja mustia neliöitä, ympyröitä ja kolmioita. Loogikot eivät muista kovinkaan tarkasti, millainen taulu oli. He antavatkin hyvin yleisiä kuvauksia siitä, kuten alla ilmenee:
A: $\forall x\big(Musta(x) \to Ympyrä(x)\big)$
B: $\forall x\big(Neliö(x) \to Valkoinen(x)\big)$
C: $\forall x\big(Valkoinen(x) \to Kolmio(x)\big)$
D: $\forall x\, Musta(x) \to \exists x\, Neliö(x)$
E: $\forall x\, Kolmio(x) \to \exists x\big(Neliö(x) \wedge Musta(x)\big)$
Voiko tämän 'keskustelun' perusteella päätellä, että joku heistä muistaa väärin?

Tehtävissä 110–113 viitataan 'yhteisö'-esimerkin yhteydessä esitettyihin kieleen ja sen malleihin. Merkintä $\langle X, Fil_i, Rak_i, \rangle$ tarkoittaa mallia $\langle X, V \rangle$, jossa $V(R) = Rak_i$ ja $V(F) = Fil_i$.

110. Anna esimerkki lauseesta, joka on epätosi mallissa $\langle X, Fil_1, Rak_1, \rangle$ mutta tosi mallissa $\langle X, Fil_2, Rak_2, \rangle$ ja jossa ei esiinny vakioita (eli kyseisten henkilöiden nimiä).

111. Tutki seuraavien lauseiden totuutta mallissa $\langle X, Fil_2, Rak_2, \rangle$.

$$A = \exists x \forall y (R(x,y) \rightarrow x = y),$$
$$B = \forall x (R(x,x) \rightarrow x = d).$$

112. Anna esimerkki lauseesta, joka on tosi mallissa $\langle X, Fil_4, Rak_4, \rangle$ mutta epätosi mallissa $\langle X, Fil_5, Rak_5, \rangle$ ja jossa ei esiinny vakioita.

113. Etsi sellainen predikaatti Fil ja relaatio Rak, että mallissa $\langle X, Fil, Rak, \rangle$ on tosi seuraava lause:

$$\neg \exists x F(x) \wedge \forall x \forall y \neg R(x,y).$$

Piirrä kuvio.

114. Olkoon $L = \{P, Q, a\}$, jossa P ja Q ovat 1-paikkaisia predikaattisymboleja ja a on vakio. Olkoon $M = \langle X, V \rangle$ kielen L sellainen malli, jossa $X = \{1,2,3,4,5\}$, $V(a) = 1$, $V(P) = \{1,3\}$ ja $V(Q) = \{2,4\}$. Ovatko seuraavat lauseet tosia vai epätosia mallissa M:

a) $P(a)$ b) $Q(a)$ c) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$
d) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ e) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ f) $\forall x(P(x) \rightarrow \neg\, x = a)$
g) $\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

115. Olkoon $\mathbf{N}$ luonnollisten lukujen joukko. Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia?

a) $\forall x \in \mathbf{N}\ \forall y \in \mathbf{N} : x < y$ b) $\exists x \in \mathbf{N}\ \exists y \in \mathbf{N} : x < y$
c) $\exists x \in \mathbf{N}\ \forall y \in \mathbf{N}\ \forall z \in \mathbf{N} : x + y = z$
d) $\exists x \in \mathbf{N}\ \forall y \in \mathbf{N}\ \exists z \in \mathbf{N} : x + y = z$

Huomaa, että nämä väittämät eivät ole mitään predikaattilogiikan kaavoja. Voit ajatella merkinnän $\forall x \in \mathbf{N}$ lyhennykseksi sanonnalle 'kaikille luonnollisille luvuille x pätee, että ... ' ja merkinnän $\exists x \in \mathbf{N}$ lyhennykseksi sanonnalle 'on olemassa sellainen luonnollinen luku x, että ... '

116. Etsi sellainen kieli L ja sen malli M, että voit esittää kielessä L lauseet, joiden tulkinta mallissa M vastaa edellisen tehtävän 115 väitteitä. (Esitä nämä kielen L lauseet.)

117. Olkoon $\mathbf{N}$ luonnollisten lukujen joukko. Onko väite

$$\exists x \exists y \exists z \exists n \in \mathbf{N} : n \geq 2 \wedge x^n + y^n = z^n$$

tosi vai epätosi? Etsi sellainen kieli L ja sen malli M, että voit esittää kielessä L lauseen, jonka tulkinta mallissa M vastaa yllä olevaa lausetta.

Pohdittavaksi: Miksi tämä tehtävä olisi täysin kohtuuton, jos kaavan $n \geq 2$ tilalla olisi kaava $n > 2$?

118. Olkoon $M = \langle X, V \rangle$ malli kielelle $L = \{R, a, b\}$, jossa R on kaksipaikkainen predikaattisymboli ja a sekä b yksilövakioita. Mallissa M universumi $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $V(a) = 1$, $V(b) = 2$ ja

$$V(R) = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle\}.$$

Tutki, ovatko seuraavat kielen L lauseet tosia mallissa M:
a) $a = b$ b) $\exists x R(b, x)$ c) $\forall x R(x, a)$ d) $\forall x \exists y R(x, y)$
e) $\exists x \forall y R(x, y)$ f) $\forall x(x = a \vee \neg\, x = b)$
Piirrä kuvio.

119. Olkoon $L = \{P, R, a\}$, jossa P on 1-paikkainen ja R 2-paikkainen predikaattisymboli ja a on vakio. Olkoon $M = \langle X, V \rangle$ kielen L sellainen malli, jossa $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $V(a) = 1$, $V(P) = \{1, 3\}$ ja $V(R) =$

$$\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 1, 3\rangle\, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle\}$$

Ovatko seuraavat lauseet tosia vai epätosia tässä mallissa M (piirrä kuvio):
a) $\forall x(x = a \rightarrow R(x, x))$ b) $\forall x(R(x, a) \wedge R(a, x))$
c) $\forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow R(y, x))$ d) $\forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x))$
e) $\forall x \forall y \forall z(R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$

120. Ovatko seuraavat lauseet tosia vai epätosia tehtävän 119 mallissa M:
a) $\exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$ b) $\exists x(P(x) \wedge \neg P(x))$
c) $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))$ d) $\exists x \exists y(P(x) \wedge \neg P(y) \wedge R(x, y))$
e) $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y R(y, x))$ f) $\exists x \exists y(P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y \wedge R(x, y))$

121. Olkoon käytössä vain predikaatit $I(x, y)$, x on y:n isä ja $\ddot{A}(x, y)$, x on y:n äiti. Miten voidaan esittää (so. määritellä) seuraavat käsitteet:
a) $La(x, y)$, x on y:n lapsi b) $Si(x, y)$, x on y:n sisarus
c) $Se(x, y)$, x on y:n serkku
Ohje: Kun jokin käsite on määritelty, niin sitä saa käyttää jatkossakin lyhennysmerkintänä.

122. Olkoon edellisen tehtävän 121 predikaatti $Se(x, y)$ määritelty asianmukaisesti predikaattien $I(x, y)$ ja $\ddot{A}(x, y)$ avulla. Esitä sellainen malli kielelle $L = \{I, \ddot{A}\}$, jossa lause

$$\forall x \forall y \forall z \Big(Se(x, y) \wedge Se(y, z) \rightarrow Se(x, z) \Big)$$

on epätosi (tässä siis predikaattisymboli Se on ajateltava korvattavaksi sen määritelmällä). Piirrä kuvio! (Jos malli on riittävän 'realistinen', niin tehtävän tulos osoittaa, ettei relaatio 'sukulaisuus' ole transitiivinen.)

123. Anna esimerkki sellaisesta mallista $M = \langle X, V \rangle$, jossa lause

$$\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

on *epätosi.*

124. Olkoon $L = \{P, Q\}$, jossa P ja Q ovat yksipaikkaisia predikaattisymboleita. Onko lausejoukolla T,

$$T = \{\exists x(P(x) \to Q(x)), \exists x P(x), \forall x(\neg Q(x))\},$$

mallia? Etsi siis jokin kielen L malli, jossa kaikki joukon T lauseet ovat tosia tai todista, ettei tällaista mallia ole olemassa.

125. Etsi jokin lausejoukon $\{\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x P(x)\}$ malli (eli malli, jossa kaikki joukon lauseet ovat tosia). Onko lause $\exists x Q(x)$ tosi tässä mallissa?

126. Etsi jokin (sopivan kielen) malli, jossa seuraavat lauseet ovat (samanaikaisesti) tosia:

$$\begin{array}{l} \forall x R(x,x) \\ \forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x)) \\ \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)) \\ \forall x \exists y (R(x,y) \wedge x \neq y) \end{array}$$

127. Etsi jokin (sopivan kielen) malli, jossa lause

$$A = \Big(\forall x \forall y (R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y)\Big) \wedge \Big(\forall x \forall y (R(x,y) \vee R(y,x))\Big)$$

on tosi.

128. Malleissa $\langle X, V \rangle$ edellytetään aina, että $X \neq \emptyset$. Anna esimerkki lauseesta, joka on tosi jokaisessa tällaisessa mallissa (eli loogisesti todesta lauseesta), mutta joka olisi kumoutuva, *jos sallittaisiin* (tätä ei siis kuitenkaan koskaan sallita), että mallin universumi X voi olla myös tyhjä joukko $\emptyset$.

Tehtävät 129–136. Tutki piirtämällä sopivia kuvioita, ovatko seuraavat lauseet loogisesti tosia. Myönteisessä tapauksessa riittää pelkkä vastaus, kielteisessä tapauksessa on esitettävä kuvio, jossa tutkittava lause on epätosi.

129. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

130. $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

131. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

132. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

133. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \to \forall x Q(x))$

134. $\exists x(P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$

135. $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x))$

136. $\exists x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \leftrightarrow (\exists x P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x))$