Johdatus modaalilogiikkaan

harjoitustehtävien ratkaisuja

Vastausten laatimiseen ovat osallistuneet Jukka Ilmonen, Aatu Koskensilta, Renne Pesonen, Ari Virtanen ja Veikko Rantala.

1. Vastaavasti: 'A ei ole mahdollinen', 'A ja A:n negaatio ovat mahdollisia', 'A:n ja B:n konjunktio on mahdollinen' (eli 'A ja B ovat yhdessä mahdollisia'), 'A:n ja B:n konjunktio ei ole mahdollinen' (A ja B eivät ole yhdessä mahdollisia').

2. Merkitykset samoja. $A : \neg\neg\Diamond D$, $B : \Diamond D$ ja $C : \neg\Box\neg D$, missä D on lause 'avaruudessa on elämää'.

3. (a) $\Box p$, (b) $\neg\Box p$, (c) $\Diamond p$, (d) $\neg\Diamond p$, (e) $\neg\Diamond\neg p$. (a) ja (e) merkitykseltään samoja.

4. Suora käännös: $p \to \Box q$. Voidaan kuitenkin ajatella, että puheenaoleva luonnollisen kielen lause tarkoittaakin, että on välttämätöntä, että jos sataa, niin kastun, jolloin käännös olisi: $\Box(p \to q)$. Tämä ei kuitenkaan ole yhtäpitävä edellisen kanssa.

5.
(a) 'Jos lause on välttämätön, niin se on tosi',
(b) 'Jos lause on välttämätön , niin se on mahdollinen',
(c) 'Jos lause on mahdollinen, niin se on välttämätön'
(d) 'Jos lause on mahdollinen, niin se on tosi'.

(a) ja (b) ovat intuitiivisesti katsoen yleisesti tosia.

6.
(a) 'Jos A on mahdollinen, niin A:n ja B:n disjunktio on mahdollinen',
(b) 'Jos A:n ja B:n disjunktio on mahdollinen, niin B on mahdollinen,
(c) 'Jos A on mahdollinen ja B mahdoton, niin A:n ja B:n disjunktio on mahdollinen',
(d) 'Jos A ja B ovat mahdollisia, niin A ja B ovat yhteensopivia',
(e) 'Jos A on mahdollinen ja B mahdoton, niin A ja B ovat yhteensopimattomia'.

(a), (c) ja (e) vaikuttavat yleisesti tosilta.

7. (a) $\Box(A \land B) \leftrightarrow \Box A \land \Box B$. Aina tosi. (b) $\Box(A \lor B) \leftrightarrow \Box A \lor \Box B$. Ei ole aina tosi.

8. $\big(\Box(A \to B) \wedge \Box A\big) \to \Box B$. Aina tosi.

9. (a) On. (b) Ei. Huomaa, että $\Diamond A$ ei ole tosi maailmassa, jolle ei ole vaihtoehtoista maailmaa. Sen sijaan $\Box A$ on triviaalisti tosi sellaisessa maailmassa.

10. (a) $\Box A \to \Diamond A$. Vrt. Tehtävä 9. (b) $\Box A \to \Box\Box A$. Vaihtoehtorelaatio R on transitiivinen eli aina kun wRw' ja $w'Rw''$, niin wRw''.

11. (a) $\Diamond A \to \Box\Diamond A$. Vaihtoehtorelaatio transitiivinen ja symmetrinen tai euklidinen. R on symmetrinen, jos aina kun wRw', niin $w'Rw$, ja euklidinen, jos aina kun wRw' ja wRw'', niin $w'Rw''$. (b) $\Diamond\Box A \to A$. Vaihtoehtorelaatio symmetrinen.

12. Vrt. mahdollisuusoperaattorin $\Diamond$ ehto.

13. Käsityksemme tietämisestä ja uskomisesta on yleensä sellainen, että episteemisen vaihtoehtorelaation tulisi olla refleksiivinen, mutta doksastisen ei sen paremmin refleksiivinen kuin irrefleksiivinekään; keksi esimerkkejä. Huomaa, että R on refleksiivinen, jos aina wRw ja irrefleksiivinen, jos aina $w\not R w$.

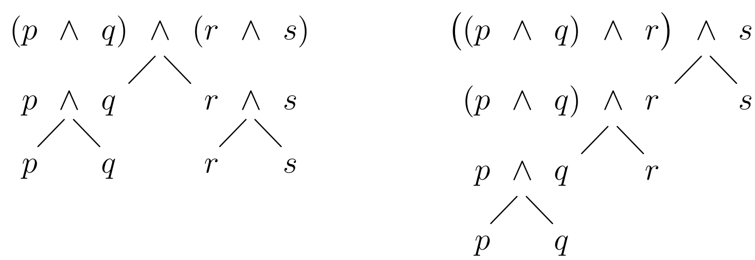
14. Pohdi siis, tulisiko ehdon $\Box A \to \Box\Box A$ (vrt. tehtävä 10(b)) olla voimassa, missä $\Box$ merkitsee vuoronperään kutakin välttämättömyyden lajia.

15. Kaava itse, $\Box(p \to q) \wedge \Box p$, $\Box(p \to q)$, $\Box p$, $p \to q$, p, q, $\Box q$.

18. Sulut voidaan kaavanmuodostussääntöjen mukaan panna 5 eri tavalla, kun jätetään uloimmat sulut pois:

$$(p \wedge q) \wedge (r \wedge s), \qquad \big((p \wedge q) \wedge r\big) \wedge s, \qquad p \wedge \big(q \wedge (r \wedge s)\big),$$
$$\big(p \wedge (q \wedge r)\big) \wedge s, \qquad p \wedge \big((q \wedge r) \wedge s\big).$$

Kahden ensimmäisen rakennepuut ovat:

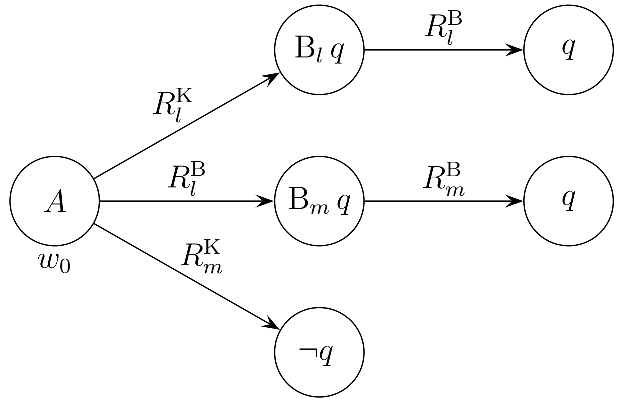


20. (a) $\Box\Box p \to \Box p$, (b) $\Box\Diamond A \to \Diamond A$, (c) $\Box\Box\Box A \to \Box\Box\Box\Box A$.

21. $(q \vee p) \to (p \wedge s)$, $(r \wedge s) \to \big((r \wedge s) \wedge s\big)$.

22. Olkoon p: 'Kuu on juustoa'. (a) $\mathrm{K}_{\mathrm{Matti}} \neg \mathrm{B}_{\mathrm{Matti}}\, p$, (b) $\neg\Diamond\, \mathrm{B}_{\mathrm{Matti}}\, p$, (c) $\mathrm{O}\, \mathrm{K}_{\mathrm{Matti}} \neg p$.

23. Merkitään alkuperäistä lausetta A:lla.



24. (a) $\neg\, \mathrm{O}\, r$, (b) $\mathrm{P}\, p \wedge \mathrm{O}\, r$, (c) $r \to \mathrm{P}\, p$, (d) $\neg r \to \neg\, \mathrm{P}\, p$, (e) $\mathrm{O}\, q \to \mathrm{O}\, r$.

25. (a) 'Jos Pekan täytyy loukata Maijaa, niin Pekan täytyy pyytää Maijalta anteeksi'

(b) 'Jos Pekan täytyy loukata Maijaa, niin Pekka pyytää Maijalta anteeksi'.

(c) 'Jos Pekka loukkaa Maijaa, niin Pekan täytyy pyytää Maijalta anteeksi'.

(d) 'Täytyy olla niin, että jos Pekka loukkaa Maijaa, niin hän pyytää Maijalta anteeksi'.

(Pesonen)

26. (a) $\mathrm{O}\, A \to \Box\, \mathrm{P}\, A$, (b) $\Box A \to \mathrm{P}\, A$, (c) $\neg\Diamond A \to \neg\Diamond\, \mathrm{O}\, A$.

27. (a) $\Diamond\, \mathrm{Q}\, \mathrm{P}\, A$, jossa Q on 'menneisyydessä', P on 'sallittua'
(b) $\Diamond(\mathrm{O}\, A \wedge F\neg\, \mathrm{O}\, A)$, (c) $\mathrm{H}\, \mathrm{P}\, A \wedge \neg\, \mathrm{P}\, A$.

32. A tosi, B epätosi, C tosi, D tosi, E tosi, F tosi.

33. A Tosi, B epätosi, C epätosi, D tosi, E tosi, F tosi.

34. Alikaavat ovat:

$A : \Box(\Diamond p \wedge q \to (p \leftrightarrow \neg q))$	$B : \Diamond p \wedge q \to (p \leftrightarrow \neg q)$
$C : \Diamond p \wedge q$	$D : p \leftrightarrow \neg q$
$E : \Diamond p$	$F : \neg q$
$G : p$	$H : q$

Totuusjoukot:

$$\|A\|^M = \emptyset,\ \|B\|^M = \{w_1, w_2, w_4, w_5\},$$
$$\|C\|^M = \|H\|^M = P(q) = \{w_3, w_4, w_5\},\ \|D\|^M = \{w_1, w_2, w_4, w_5\},$$
$$\|E\|^M = W,\ \|F\|^M = W \backslash P(q) = \{w_1, w_2\},\ \|G\|^M = P(p) = \{w_1, w_2, w_3\}$$

(Pesonen)

35. Vastaavasti: $W\backslash$, $\cap$, $\cup$. Eli:

$$\|\neg A\|^M = W \backslash \|A\|^M, \quad \|A \wedge B\|^M = \|A\|^M \cap \|B\|^M, \quad \|A \vee B\|^M = \|A\|^M \cup \|B\|^M.$$

36. $W \setminus \|B\|^M \cup \|C\|^M$, $\quad (W \setminus \|B\|^M \cup \|C\|^M) \cap \big((W \setminus \|C\|^M \cup \|B\|^M)\big)$.

39. Väite (a) on oikein:

$M \vDash A \wedge B \Leftrightarrow \forall w \in W : M, w \vDash A \wedge B \Leftrightarrow$

$\forall w \in W : M, w \vDash A$ ja $\forall w \in W : M, w \vDash B \Leftrightarrow M \vDash A$ ja $M \vDash B$

Väite (b) ei pidä paikkaansa: suunta $M \vDash A \vee B \Rightarrow M \vDash A$ tai $M \vDash B$ ei ole voimassa. Osoitetaan vastaesimerkin avulla konstruoimalla malli $M = \langle W, P \rangle$, jossa $W = \{w_1, w_2\}$, $P(p) = \{w_1\}$ ja $P(q) = \{w_2\}$. Valitaan: $A = p$ ja $B = q$.

Nyt $M, w_1 \vDash A$, joten $M, w_1 \vDash A \vee B$, sekä $M, w_2 \vDash B$, joten $M, w_2 \vDash A \vee B$.
Eli $\forall w \in W : M, w \vDash A \vee B$, joten $M \vDash A \vee B$.
Kuitenkin $M, w_2 \nvDash A$, joten $M \nvDash A$, sekä $M, w_1 \nvDash B$, joten $M \nvDash B$.
Näin ollen $M \vDash A \vee B \nRightarrow M \vDash A$ tai $M \vDash B$.

(Pesonen)

42. Olkoon $M = \langle W, P \rangle$ L-malli ja $w \in W$. (4): Jos $M, w \vDash \Box A$, niin $M, w' \vDash A$ aina, kun $w' \in W$. Tästä seuraa välttämättömyysoperaattoria koskevan totuusehdon mukaan, että $M, w' \vDash \Box A$ aina, kun $w' \in W$. Tästä taas seuraa, että $M, w' \vDash \Box\Box A$ aina, kun $w' \in W$, siis myös, kun $w' = w$. Näin ollen $M, w \vDash \Box A \to \Box\Box A$. Koska M ja $w \in W$ ovat mielivaltaisia, niin $\vDash \Box A \to \Box\Box A$.

(5): Olkoon $M = \langle W, P \rangle$ L-malli ja $w \in W$. Jos $M, w \vDash \Diamond A$, niin $\exists w' \in W : M, w' \vDash A$. Tästä seuraa, että $\forall w'' \in W : M, w'' \vDash \Diamond A$. Näin ollen $\forall w'' \in W : M, w'' \vDash \Box\Diamond A$, erityisesti $M, w \vDash \Box\Diamond A$. Näin ollen $M, w \vDash \Diamond A \to \Box\Diamond A$. Koska M ja $w \in W$ ovat mielivaltaisia, niin $\vDash \Diamond A \to \Box\Diamond\, A$.

43. p voi olla kaikissa mallin maailmoissa epätosi, vaikka $p \vee q$ on jossakin tosi.

44. q voi olla kaikissa mallin maailmoissa epätosi, vaikka p on jossakin tosi ja $p \to q$ on jossakin tosi.

45. Konstruoi malli ja sen maailma, joille pitää paikkansa, että lauseet $\Box(p \vee q)$, $\Box(p \vee r)$ ja $\neg\Box p$ ovat tässä maailmassa tosia, mutta lause $\Box(p \to (q \vee r))$ epätosi. Jälkimmäisen osoittamiseksi tarkastele maailmoja, joissa p on tosi, mutta q ja r epätosia.

47. Oletetaan, että $A \equiv_L B$. Olkoon $M = \langle W, P \rangle$ on L-malli. Määritelmän mukaan tällöin jokaisessa $w \in W : M, w \vDash A \leftrightarrow B$. Tällöin jokaisessa $w \in W$, joko $M, w \vDash A$ ja $M, w \vDash B$, tai $M, w \nvDash A$ ja $M, w \nvDash B$. Siis: $w \in \|A\|^M \Rightarrow w \in \|B\|^M$ ja $w \notin \|A\|^M \Rightarrow w \notin \|B\|^M$. Näin ollen $\|A\|^M = \|B\|^M$.

Oletetaan, että $\|A\|^M = \|B\|^M$ jokaisessa L-mallissa. Olkoon $M = \langle W, P \rangle$ mielivaltainen L-malli. Tällöin oletuksen mukaan $\forall w \in W : w \in \|A\|^M \Leftrightarrow w \in \|B\|^M$. Näin ollen kaikille $w \in W$ pätee $M, w \vDash A \Rightarrow M, w \vDash B$, ja $M, w \nvDash A \Rightarrow M, w \nvDash B$. Tästä seuraa suoraan, että kaikilla $w \in W$, joko $M, w \vDash A$ ja $M, w \vDash B$, tai $M, w \nvDash A$ ja $M, w \nvDash B$. Koska oletuksen mukaan tulos pätee jokaisen L-mallin kaikissa maailmoissa, niin $\vDash_L A \leftrightarrow B$, eli $A \equiv_L B$.

(Pesonen)

48. Osoita harjoitustehtävän 47 avulla, että

(i) $A \equiv A$,

(ii) jos $A \equiv B$ ja $B \equiv C$, niin $A \equiv C$,

(iii) jos $A \equiv B$, niin $B \equiv A$.

53. $\Diamond(\neg p \vee \Box\neg q)$. Mitä sääntöjä tässä käytetään?

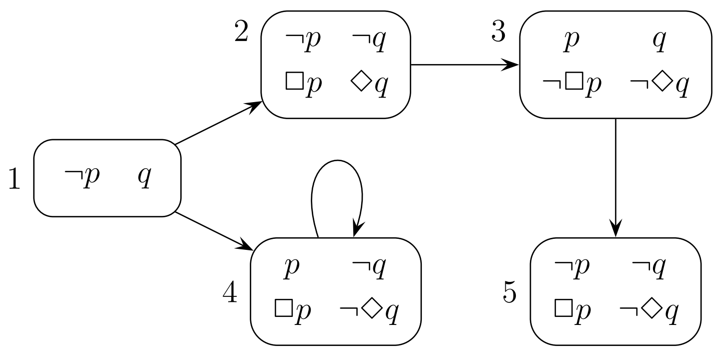
54. $\Diamond(\Diamond p \wedge \Diamond\neg q)$.

55. $\Diamond\Box(p \wedge \Box q)$. Yksinkertaisin muoto on $\Box p \wedge \Box q$ tai $\Box(p \wedge q)$ (ks. harj. 41 ja 57).

56. $\Box p \wedge \Box q \to \Diamond p$.

58. (a) $\Diamond A$, (b) $\Box A$.

59. $\|A\| = \{1,3,4,5\}$, $\|B\| = \{1,3,4\}$, $\|C\| = \{5\}$, $\|D\| = \{1\}$.



60. $\|A\| = \{2,3,4\}$, $\|B\| = \{1,2,3,4\} = W$, $\|C\| = \{1,2,3,4\} = W$, $\|D\| = \{2,3,4\}$, $\|E\| = \{3,4\}$, $\|F\| = \{2,3,4\}$. (Vrt. implikaation totuustaulu.)

62. $\|A\| = \{3,4\}$, $\|B\| = \|C\| = \{4\}$, $\|D\| = \emptyset$.

63. Jos M on L-malli, niin

$$\|\Box A\|^M = \{w \mid \forall w' \in W : wRw' \Rightarrow w' \in \|A\|^M\}$$

(i) Oletetaan, että $w \in \|\Box A\|^M$, siis $M, w \models \Box A$. Operaattorin $\Box$ totuusehdon mukaan tällöin $\forall w' \in W : wRw' : M, w' \models A$. Näin ollen $\forall w' \in W : wRw' \Rightarrow w' \in \|A\|^M$. Täten $w \in \{x \mid \forall w' \in W : xRw' \Rightarrow w' \in \|A\|^M\}$.

(ii) Oletetaan, että $w \in \{x \mid \forall w' : wRw' \Rightarrow w' \in \|A\|^M\}$. Siis $\forall w' \in W : wRw' : M, w' \models A$. Tästä seuraa suoraan, että $M, w \models \Box A$, joten $w \in \|\Box A\|^M$.

Koska tapauksissa (i) ja (ii) valittu maailma oli mielivaltainen, niin näistä tuloksista seuraa, että yleisesti $\|\Box A\|^M = \{w \mid \forall w' \in W : wRw' \Rightarrow w' \in \|A\|^M\}$.

Timanttia koskeva väite todistetaan vastaavaan tyyliin.

(Pesonen)

64. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ K-malli jossa R toteuttaa ehdon $\forall w \in W : \exists w' \in W : wRw'$ ja $w \in W$ mielivaltainen mallin M maailma. Oletuksen mukaan $\exists w' \in W : wRw'$. Lauseen $(p \vee \neg p)$ tautologisuuden perusteella $M, w' \vDash (p \vee \neg p)$, joten $M, w \vDash \Diamond(p \vee \neg p)$, eli $w \in \|\Diamond(p \vee \neg p)\|^M$. Koska tulos pätee jokaiselle $w \in W$, niin $\|\Diamond(p \vee \neg p)\|^M = W$.

Valitaan jälleen mielivaltaisesti $w \in W$. Oletuksen perusteella $\exists w' \in W : wRw'$. Lauseen $\neg(p \wedge \neg p)$ tautologisuuden perusteella $M, w' \vDash \neg(p \wedge \neg p)$, jolloin siis $M, w' \nvDash (p \wedge \neg p)$. Siis $M, w \nvDash \Box(p \wedge \neg p)$, joten $w \notin \|\Box(p \wedge \neg p\|^M$. Koska w valittiin mielivaltaisesti, tulos on yleistettävissä jokaiselle $w \in W$, joten $\|\Box(p \wedge \neg p)\|^M = \emptyset$.

(Pesonen)

65. Esimerkiksi:

(i) $P(p) = \{1\}, \quad P(q) = \{0\}$,

$$\begin{aligned} R = \{\langle 1,2\rangle\} \cup \{\, \langle 2n, 0\rangle \mid n \in \mathbb{N}\,\} \cup \{\, \langle 2n, 1\rangle \mid n \in \mathbb{N}\,\} \\ \cup \{\, \langle 2n+1, 1\rangle \mid n \in \mathbb{N}\,\} \cup \{\, \langle 2n+1, 2n+1\rangle \mid n \in \mathbb{N}\,\}; \end{aligned}$$

(ii) $P(p) = \{0, 1\}, \quad P(q) = \{0\}$,

$$\begin{aligned} R = \{\, \langle 0,2\rangle, \langle 1,2\rangle\,\} \cup \{\, \langle n, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\,\} \cup \{\, \langle 2n, 0\rangle \mid n \in \mathbb{N}\,\} \\ \cup \{\, \langle 2n+1, 1\rangle \mid n \in \mathbb{N}\,\}. \end{aligned}$$

Onko vielä muita mahdollisuuksia?

66. Tehtävä on virheellinen. Kaava $(\Diamond A \to \Diamond B) \to \Diamond(A \to B)$ on validi vain sellaisten mallien luokassa, jossa mallin jokaisella maailmalla on vaihtoehtoisia maailmoja. Tällä lisäoletuksella kaava voidaan todistaa validiksi seuraavasti: Oleta, että $\Diamond A \to \Diamond B$ on tosi mielivaltaisen mallin maailmassa w. Mitä siitä seuraa? Osoita, että jos B on tosi w:n vaihtoehtoisessa maailmassa, niin myös $A \to B$ on siinä tosi.

67. Olkoon esimerkiksi $W = \{1, 2, 3\}$, $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$, ja oletetaan, että $M, 1 \vDash A$; $M, 2 \vDash \neg A$; $M, 3 \vDash A$. Osoita, etteivät ensimmäinen, kolmas ja neljäs kaava ole tosia maailmassa 1 eikä toinen kaava maailmassa 2.

68–70. Huomioi disjunktion totuustaulu.

71. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ K-malli ja $w \in W$ s.e. $M, w \vDash \neg(p \to \Box\Diamond p)$. Tällöin siis $M, w \nvDash p \to \Box\Diamond p$. Implikaation totuusehdon mukaan nyt täytyy olla, että $M, w \vDash p$ ja $M, w \nvDash \Box\Diamond p$. Operaattorin $\Box$ totuusehdon mukaan tällöin $\exists w' \in W : wRw'$ ja $M, w' \nvDash \Diamond p$. Edelleen operaattorin $\Diamond$ totuusehdon mukaan nyt $\forall w'' \in W : w'Rw'' : M, w'' \nvDash p$.

Jos $\exists w'' \in W : w'Rw''$, niin $M, w'' \not\models p$, joten implikaation totuusehdon mukaan $M, w'' \models p \to \Box\Diamond p$. Tällöin $M, w'' \not\models \neg(p \to \Box\Diamond p)$, joten $M \not\models \neg(p \to \Box\Diamond p)$.

Jos $\nexists w'' \in W : w'Rw''$, niin $M, w' \models \Box\Diamond p$, jolloin $M, w' \models p \to \Box\Diamond p$ ja edelleen $M, w' \not\models \neg(p \to \Box\Diamond p)$, joten $M \not\models \neg(p \to \Box\Diamond p)$.

Näin ollen aina, kun $M = \langle W, R, P\rangle$ ja $M, w \models \neg(p \to \Box\Diamond p)$ jossain $w \in W$, niin $\exists w' \in W : M, w' \not\models \neg(p \to \Box\Diamond p)$, joten ei ole olemassa K-mallia M, s.e. $M \models \neg(p \to \Box\Diamond p)$.

(Pesonen)

73. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ K-malli. Oletetaan, että $M \models A \leftrightarrow B$. Olkoon $w \in W$ mallin M mielivaltainen maailma. Nyt joko $M, w \models \Box A$ tai $M, w \not\models \Box A$

Oletetaan, että $M, w \models \Box A$. Olkoon $w' \in W$ mikä tahansa mallin M maailma, siten että wRw'. Tällöin $M, w' \models A$. Oletuksen mukaan $M, w' \models A \leftrightarrow B$, joten nyt $M, w' \models B$. Näin ollen $M, w \models \Box B$. Ja tällöin siis $M, w \models \Box A \leftrightarrow \Box B$.

Jos $M, w \not\models \Box A$, niin $\exists w' \in W : wRw' : M, w' \not\models A$. Oletuksen mukaan $M, w' \models A \leftrightarrow B$, joten $M, w' \not\models B$. Näin ollen $M, w \not\models \Box B$ ja nyt siis $M, w \models \Box A \leftrightarrow \Box B$.

Siis (RE) säilyttää validisuuden, sillä $M \models A \leftrightarrow B \Rightarrow M \models \Box A \leftrightarrow \Box B$ kaikissa K-malleissa.

(Pesonen)

74. Vrt. lauseen 2.5 todistus.

75–76. Muodosta K-mallit, joissa vastaavat ekvivalenssit eivät ole valideja.

78. Aloita toteamalla, että koska $A = \Box B \vee \neg\Box B$ on tautologia, säännön (PL) perusteella $A \in \mathbf{K}$.

80. Aloita toteamalla, että koska $C = A \wedge B \to A$ on tautologia, säännön (PL) perusteella $C \in \mathbf{K}$.

84. (1) Oleta, että R on refleksiivinen ja euklidinen. Osoita ensin, että tästä seuraa symmetrisyys.Käytä sitten hyväksi symmetrisyyttä ja euklidisuuden määritelmää. (2) Oleta, että R on ekvivalenssirelaatio, jolloin se on refleksiivinen. Käytä sitten transitiivisuutta ja symmetrisyyttä.

85. Merkitään $M = \langle W, R, P\rangle$ ja oletetaan, että $M, w \models \Diamond\Box A$. Tällöin on sellainen maailma w', että wRw' ja $M, w' \models \Box A$. Olkoon nyt w'' mielivaltainen sellainen maailma, että wRw''. Euklidisuudesta seuraa, että $w'Rw''$, joten $M, w'' \models A$. Koska nyt w'' on mielivaltainen w:n vaihtoehto, niin $M, w \models \Box A$. Koska w on mielivaltainen, niin $M \models \Diamond\Box A \to \Box A$.

86-87. Riittää tarkastella T-malleja, sillä skeemat (D) ja $(T\Diamond)$ ovat valideja jokaisessa K-mallissa $M = \langle W, R, P\rangle$, jossa R on refleksiivinen. Koska $S4$- ja $S5$-malleissa relaatio R on refleksiivinen, niin tuloksesta $A \in \mathbf{T}$ seuraa suoraan tulokset $A \in \mathbf{S4}$ ja $A \in \mathbf{S5}$.

88. Riittää tarkastella $S4$-malleja. Käytä mahdollisuusoperaattorin totuusehtoa ja vaihtoehtorelaation transitiivisuutta.

89. Tarvitset vain symmetrisyyttä.

90. Merkitään $M = \langle W, R, P\rangle$ ja oletetaan, että $M, w \vDash \Diamond A$. Tällöin on sellainen maailma w', että wRw' ja $M, w' \vDash A$. Olkoon nyt w'' mielivaltainen sellainen maailma, että wRw''. Symmetrisyydestä seuraa, että $w''Rw$. Transitivisuudesta seuraa, että $w''Rw'$, ja koska lisäksi $M, w' \vDash A$, niin $M, w'' \vDash \Diamond A$. Koska w'' on mielivaltainen w:n vaihtoehto, niin $M, w \vDash \Box\Diamond A$. Koska w on mielivaltainen, niin $M \vDash \Diamond A \to \Box\Diamond A$.

92. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ sellainen T-malli. Jos $M, w \vDash \Box A$, mutta $M, w \nvDash \Box\Box A$, niin on oltava sellainen maailma w', että wRw' mutta $M, w' \nvDash \Box A$, joten on oltava sellainen maailma w'', että $w'Rw''$ ja $M, w'' \nvDash A$. Näin ollen voimme esimerkiksi määritellä, koska R:n on oltava refleksiivinen mutta ei esim. transitiivinen: $W = \{w, w', w''\}$, $R = \{\langle w, w'\rangle, \langle w', w''\rangle, \langle w, w\rangle, \langle w', w'\rangle, \langle w'', w''\rangle\}$, ja olettaa lisäksi, että jollekin lausemuuttujalle p, $P(p) = \{w, w'\}$.

94. Esimerkiksi seuraava malli: $W = \{w, w', w''\}$, $R = \{\langle w, w'\rangle, \langle w', w''\rangle, \langle w, w''\rangle, \langle w, w\rangle, \langle w', w'\rangle, \langle w'', w''\rangle\}$, $P(p) = \{w\}$. Osoita, että (B) ei ole tosi maailmassa w.

96. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ $S4$-malli (piirrä kuvio) jossa

$$W = \{w_1, w_2\}, R = \{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1, w_2\rangle, \langle w_2, w_2\rangle\}, P(p) = \{w_1\}.$$

Valitaan $A = p$. Nyt $M, w_1 \vDash A$ ja w_1Rw_1, joten $M, w_1 \vDash \Diamond A$. Maailman w_2 ainoa vaihtoehto on w_2 itse, ja $M, w_2 \nvDash A$, joten selvästi $M, w_2 \nvDash \Diamond A$. Koska w_1Rw_2, niin $M, w_1 \nvDash \Box\Diamond A$, joten $M, w_1 \nvDash \Diamond A \to \Box\Diamond A$. Näin ollen skeema (5) ei ole $S4$-validi.

(Pesonen)

98. Näiden systeemien määritelmien perusteella on selvää, että (i) $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{S4} \subseteq \mathbf{S5}$. Tehtävän 90 tuloksen mukaan skeema (5) on validi $S5$-malleissa, joten esimerkiksi $\Diamond p_1 \to \Box\Diamond p_1 \in \mathbf{S5}$ Tehtävän 96 tuloksen mukaan skeema (5) ei kuitenkaan ole $S4$-validi, joten $\Diamond p_1 \to \Box\Diamond p_1 \notin \mathbf{S4}$. Näin ollen (ii) $\mathbf{S5} \neq \mathbf{S4}$. Lauseen 4.5 mukaan skeema (4) on validi kaikissa sellaisissa K-malleissa $\langle W, R, P\rangle$ joissa R on transitiivinen, joten esimerkiksi $\Box p_1 \to \Box\Box p_1 \in \mathbf{S4}$. Tehtävän 92 mukaan skeema (4) ei ole T-validi, joten $\Box p_1 \to \Box\Box p_1 \notin \mathbf{T}$. Näin ollen (iii) $\mathbf{S4} \neq \mathbf{T}$. Tuloksista (i), (ii) ja (iii) saadaan, että $\mathbf{T} \subset \mathbf{S4} \subset \mathbf{S5}$.

99. Välittömästi edelläolevista määritelmistä seuraa, että

$$\begin{aligned} A \in \bigcap_{M \in \mathcal{M}} &\Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{M}\colon A \in \mathrm{Th}(M) \\ &\Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{M}\colon M \vDash A \Leftrightarrow F \vDash A \Leftrightarrow A \in \mathrm{Th}(F). \end{aligned}$$

100. (a) Vaikka $\mathrm{Th}(F_1 \oplus F_2) \subseteq \mathrm{Th}(F_1) \cup \mathrm{Th}(F_2)$, yleensä kuitenkin $\mathrm{Th}(F_1) \cup \mathrm{Th}(F_2) \nsubseteq \mathrm{Th}(F_1 \oplus F_2)$. Kohta (a) voidaan siis vastaesimerkillä osoittaa vääräksi.

Kohdan (b) väite pitää paikkansa. Tämän todistamiseksi totea ensin, että koska W_1 ja W_2 ovat erillisiä (joten R_1 ja R_2 ovat myös), niin $\langle W_1 \cup W_2, R_1 \cup R_2, P\rangle \models A$ jos ja vain jos $\langle W_1, R_1, P_1\rangle \models A$ ja $\langle W_2, R_2, P_2\rangle \models A$, missä kaikille lausemuuttujille p, $P_1(p) = P(p) \cap W_1$ ja $P_2(p) = P(p) \cap W_2$. Tällöin siis $P(p) = P_1(p) \cup P_2(p)$, $P_1(p) \cap P_2(p) = \emptyset$.

Tämän perusteella

$$F_1 \oplus F_2 \models A \Leftrightarrow$$
$$\text{kaikissa malleissa } \langle W_1 \cup W_2, R_1 \cup R_2, P\rangle \models A \Leftrightarrow$$
$$\text{kaikissa malleissa } \langle W_1, R_1, P_1\rangle \models A \text{ ja kaikissa malleissa } \langle W_2, R_2, P_2\rangle \models A \Leftrightarrow$$
$$F_1 \models A \text{ ja } F_2 \models A.$$

Täsmällisesti alussa mainittu toteamus todistetaan induktiolla kaavan pituuden suhteen (tästä todistustekniikasta ks. luku 7). Induktiotodistuksessa on tarkasteltava väitettä

> jos $w \in W_i$, niin $\langle W_1 \cup W_2, R_1 \cup R_2, P\rangle, w \models A \Leftrightarrow \langle W_i, R_i, P \cap W_i\rangle, w \models A$ $(i = 1, 2)$

josta välittömästi seuraa, että $\langle W_1 \cup W_2, R_1 \cup R_2, P\rangle \models A$ jos ja vain jos $\langle W_1, R_1, P_1\rangle \models A$ ja $\langle W_2, R_2, P_2\rangle \models A$.

101. Kumpikaan ei yleisesti ole voimassa. Olkoon kehykset $F_1 = \langle W, R_1\rangle$ ja $F_2 = \langle W, R_2\rangle$ sellaiset, että $W = \{w\}$, $R_1 = \emptyset$ ja $R_2 = \{\langle w, w\rangle\}$. Olkoon M kehyksen F_1 malli $M = \langle W, R_1, P\rangle$. Koska w:llä ei ole vaihtoehtoja, millä tahansa valuaatiolla $P(p)$ saadaan $M, w \models \Box p$ (ja itseasiassa yleisesti $\Box A \in \mathrm{Th}(F_1)$). Nyt kuitenkin valuaatiolla $P(p) = \emptyset$, $\langle W, R_2, P\rangle, w \not\models \Box p$, joten $\Box p \notin \mathrm{Th}(F_2)$. Näin ollen $\mathrm{Th}(F_1) \nsubseteq \mathrm{Th}(F_2)$. Toisaalta kaikilla valuaatioilla $P(p)$ saadaan $\langle W, R_2, P\rangle, w \models \Diamond(p \vee \neg p)$, joten $\Diamond(p \vee \neg p) \in \mathrm{Th}(F_2)$, mutta kaikilla valuaatioilla $P(p)$ saadaan $\langle W, R_1, P\rangle, w \not\models \Diamond(p \vee \neg p)$ joten $\Diamond(p \vee \neg p) \notin \mathrm{Th}(F_1)$. Näin ollen $\mathrm{Th}(F_2) \nsubseteq \mathrm{Th}(F_1)$.

(Pesonen)

104. $\Box A$.

105. $\Diamond A$.

106. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ $S4$-malli, jossa siis R on refleksiivinen sekä transitiivinen. Lisäksi olkoon $w \in W$ mallin M mielivaltainen maailma.

Oletetaan, että $M, w \models \Diamond\Box A$. Tällöin $\exists w' \in W : wRw'$ ja $M, w' \models \Box A$. Olkoon w'' sellainen mielivaltainen maailma, että $w'Rw''$. Oletetaan, että $w''Rw'''$. Relaation R transitiivisuuden mukaan $w'Rw'''$. Koska $M, w' \models \Box A$, niin nyt

$M, w''' \models A$. Näin ollen $M, w'' \models \Box A$. Relaation R refleksiivisyyden mukaan $w''Rw''$, joten $M, w'' \models \Diamond\Box A$. Näin ollen $M, w' \models \Box\Diamond\Box A$ ja edelleen koska wRw', niin $M, w \models \Diamond\Box\Diamond\Box A$. Näin ollen $M, w \models \Diamond\Box A \to \Diamond\Box\Diamond\Box A$.

Oletetaan sitten, että $M, w \models \Diamond\Box\Diamond\Box A$. Tällöin $\exists w' \in W : wRw'$ ja $M, w' \models \Box\Diamond\Box A$. Relaation R refleksiivisyyden perusteella $w'Rw'$, joten nyt erityisesti $M, w' \models \Diamond\Box A$. Tällöin $\exists w'' \in W : w'Rw''$ ja $M, w'' \models \Box A$. Koska nyt wRw' ja $w'Rw''$, niin relaation R transitiivisuuden mukaan wRw''. Tällöin $M, w \models \Diamond\Box A$. Näin ollen $M, w \models \Diamond\Box\Diamond\Box A \to \Diamond\Box A$.

Edellä saatujen tulosten perusteella $M \models \Diamond\Box A \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond\Box A$ aina, kun M on $S4$-malli, joten $\Diamond\Box A \equiv_{S4} \Diamond\Box\Diamond\Box A$.

(Pesonen)

107. (a) $\Box A$, (b) $\Box\Diamond A$, (c) $\Box\Diamond\Box A$, (d) $\Box\Diamond A$.

111. Olkoon esim. $M = \langle W, R, P\rangle$, missä $W = \{w, w', w''\}$, $R = \{\langle w, w\rangle, \langle w', w'\rangle, \langle w'', w''\rangle, \langle w, w'\rangle, \langle w', w''\rangle, \langle w, w''\rangle\}$ ja P on sellainen valuaatio, että $P(p) = \{w, w'\}$. Osoita, että $M, w \models \Diamond p$ mutta $M, w \not\models \Box\Diamond p$. Miksi M on $S4$-malli?

112. Tarkastele ensin esim. mallia $M_1 = \langle W_1, R_1, P_1\rangle$, missä $W_1 = \{w_1, w_1', w_1''\}$, $R_1 = \{\langle w_1, w_1\rangle, \langle w_1', w_1'\rangle, \langle w_1'', w_1''\rangle, \langle w_1, w_1'\rangle, \langle w_1', w_1''\rangle, \langle w_1'', w_1'\rangle, \langle w_1, w_1''\rangle\}$ ja P_1 on sellainen valuaatio, että $P_1(p) = \{w_1, w_1''\}$. Osoita, että kaava $\Diamond\Box\Diamond p$ on tosi maailmassa w_1 (mallissa M_1), mutta kaavat $\Box\Box p$ ja $\Diamond\Box p$ siinä epätosia.

Tutki sitten esim. mallia $M_2 = \langle W_2, R_2, P_2\rangle$, missä $W_2 = \{w_2, w_2', w_2''\}$, $R_2 = \{\langle w_2, w_2\rangle, \langle w_2', w_2'\rangle, \langle w_2'', w_2''\rangle, \langle w_2, w_2'\rangle, \langle w_2, w_2''\rangle\}$ ja P_2 on sellainen valuaatio, että $P_2(p) = \{w_2, w_2''\}$. Osoita, että kaava $\Diamond\Box\Diamond p$ on tosi maailmassa w_2 (mallissa M_2), mutta kaava $\Box\Diamond p$ siinä epätosi.

Tarkastele lopuksi esim. mallia $M_3 = \langle W_3, R_3, P_3\rangle$, missä $W_3 = \{w_3, w_3'\}$, $R_3 = \{\langle w_3, w_3\rangle, \langle w_3', w_3'\rangle, \langle w_3, w_3'\rangle\}$ ja P_3 on sellainen valuaatio, että $P_3(p) = \{w_3\}$. Osoita, että $\Diamond\Diamond p$ on tosi maailmassa w_3 (mallissa M_3), mutta $\Diamond\Box\Diamond p$ siinä epätosi.

113. Huomaa, että malli ei saa olla transitiivinen.

114. Huomaa, että $v(c, w)$ voi periaatteessa olla mikä tahansa U:n alkio, vaikka tarkastellaan maailmaa w.

115. Tässä semantiikassa voidaan pitää (erityisesti aktuaalisessa maailmassa) totena esim. lausetta 'Pegasus on siivekäs hevonen' ja formalisoida $P(x)$: 'x on siivekäs hevonen' ja $c =$ Pegasus, mutta tästä ei tarvitse seurata, että siivekkäitä hevosia olisi (aktuaalisesti) olemassa, eli sovellettuna aktuaaliseen maailmaan w, saadaan $w \not\models P(c) \to \exists x P(x)$.

(Pesonen)

116. Esimerkin 36 malli käy tähän tarkoitukseen.

117. On. Perustele.

118. Erottelu häviää.

119. Huomaa, että nyt $v(c, w)$ on jokaisen maailman yksilö.

120. Merkitään esim. seuraavasti: $Q(x)$: 'x on tamperelainen poikamies', $N(x)$: 'x on naimaton'. Tällöin seuraavat käännökset ovat mahdollisia: ' $\forall x\big(Q(x) \to \Box N(x)\big)$, $\forall x\Box\big(Q(x) \to N(x)\big)$, $\Box\forall x\big(Q(x) \to N(x)\big)$. Kaksi ensimmäistä ovat *de re* -tulkintoja ja viimeinen *de dicto* -tulkinta. Alkuperäisen lauseen muotoilun perusteella on ilmeistä, että *de re* on luontevampi. Voidaan käyttää myös hienompaa formalisointia ottamalla käyttöön seuraavat merkinnät $N(x)$:n lisäksi: $T(x)$: 'x on tamperelainen', $P(x)$: 'x on poikamies', jolloin saadaan seuraavat käännökset: $\forall x\big(T(x) \wedge P(x) \to \Box N(x)\big)$, $\forall x\Box\big(T(x) \wedge P(x) \to N(x)\big)$, $\forall x\big(T(x) \to \Box(P(x) \to N(x))\big)$, $\Box\forall x\big(T(x) \wedge P(x) \to N(x)\big)$. Kolme ensimmäistä ovat *de re* -tulkintoja ja viimeinen *de dicto* -tulkinta. Kolmas käännös osoittaa, että välttämättömyys koskee vain poikamiehiä, ei sinänsä tamperelaisia. Tässä mielessä ominaisuus 'tamperelainen' ei ole kovin tarpeellinen.

121. Vrt. teht. 120. Merkitse 'Pekan autoa' ja 'Mersua' predikaattisymbolilla.

122. Merkitse $P(x)$: 'x lukee tätä' ja tulkitse 'voida' mahdollisuudeksi. Tällöin käännös on: $\Diamond\exists x\big(P(x) \wedge \Diamond\neg P(x)\big)$. Tämä on *de dicto* -tulkinta, joka on tässä ilmeisempi. Jos *de re* / *de dicto* -erottelu hävitetään, niin yhtäpitävä *de re* -käännös on: $\exists x\Diamond\big(P(x) \wedge \Diamond\neg P(x)\big)$. Tämä ei kuitenkaan ole yhtä luonteva käännös kuin ensin mainittu.

123. Merkitse $P(x)$: 'x on Suomen presidentiksi valittava henkilö', $N(x)$: 'x on nainen'. Tällöin saadaan *de re* -tulkinta $\forall x\big(P(x) \to \Diamond N(x)\big)$, mutta myös seuraava *de dicto* -tulkinta on mahdollinen: $\Diamond\exists x\big(P(x) \wedge N(x)\big)$.

124. Merkitse $P(x)$: 'x on punainen', jolloin saadaan: (a) $\forall x\Diamond P(x)$. Tämä *de re* -tulkinta on luontevampi kuin *de dicto*: $\Diamond\forall x P(x)$.

(b) Molemmat tulkinnat ovat yhtä mahdollisia: $\exists x\Diamond P(x)$, $\Diamond\exists x P(x)$.

125. Merkitään kuten yllä ja lisäksi: $V(x)$: 'x on värillinen'. (a) Luonteva tulkinta on *de dicto*: $\Box\forall x\big(P(x) \to V(x)\big)$.

(b) Vastaavasti *de re*: $\forall x\big(P(x) \to \Box V(x)\big)$.

126. Olkoon $P(x)$: 'x on yksisarvinen'. *De dicto*: $\mathrm{B}_m\,\exists x P(x)$. Myös *de re* -tulkinta on mahdollinen, jos Maija luulee jotakin tiettyä aktuaalista oliota yksisarviseksi, vaikkapa sarvikuonoa: $\exists x\,\mathrm{B}_m\,P(x)$.

128. $\big(x \neq \text{Helsingin pormestari} \wedge \mathrm{B}_m(x = \text{Helsingin pormestari})\big)$. Vrt. harjoitustehtäviä edeltävään esimerkkiin.

129. Tarkastele mallia, joka käsittää sekä Maijan ”näkemismaailmat” että Maijan ”uskomusmaailmat” ja jossa Matti syö jäätelöä edellisissä maailmoissa mutta Matilla ei ole tätä ominaisuutta jälkimmäisissä. Piirrä Mattia vastaava maailmanviiva.

130. Huomaa, ettei Sherlock Holmes -nimellä ole ekstensiota w:ssä mutta on ekstensiot maailmoissa w_1, w_2, ...

131. Käytä esimerkiksi operaattoria M_m merkityksessä ’Maija on sitä mieltä, että ...’ ja yksilövakiota a nimeämään kultaista vuorta (oleta siis, että on vain yksi kultainen vuori kussakin Maijan ”mielipidemaailmassa”). $\mathrm{M}_m \exists x(x = a)$ on lauseen *de dicto* -tulkinta, ja jos Maija luulee, että jokin tietty, olemassaoleva vuori on kultainen, niin myös *de re* -tulkinta on mahdollinen: $\exists x\, \mathrm{M}_m(x = a)$. Voit myös käyttää predikaattia ’kultainen vuori’, jos ajattelet, että kussakin Maijan mielipidemaailmassa on useampia kultaisia vuoria. Vrt. tehtävä 126.

132. Episteemisen vaihtoehtorelaation on oltava refleksiivinen ja doksastisen on oltava episteemisen osajoukko. Jos $M = \langle W, R^{\mathrm{K}}, R^{\mathrm{B}}, P\rangle$ on mielivaltainen malli, niin jälkimmäinen ehto tarkoittaa, että kaikille $w, w' \in W$ pätee, että jos $wR^{\mathrm{B}}w'$, niin $wR^{\mathrm{K}}w'$.

Validisuuden toteamiseksi osoita, että jos $w \vDash \mathrm{K}\, A$, niin $w \vDash A \wedge \mathrm{B}\, A$. Käänteisen implikaation kumoamiseksi muodosta mainitut ehdot toteuttava malli, jossa $A \wedge \mathrm{B}\, A$ on tosi jossakin maailmassa, mutta $\mathrm{K}\, A$ epätosi.

133. Doksastisen vaihtoehtorelaation pitää olla transitiivinen ja melkein refleksiivinen.

134. Oleta, että $M, w \vDash \neg \mathrm{K}\, A$. Tästä seuraa, että $\exists w'\colon wRw'$ ja $M, w' \nvDash A$. Euklidisuudesta seuraa, että jos wRw'', niin $M, w'' \vDash \neg \mathrm{K}\, A$. (Piirrä kuvio ja perustele.) Tehtävän väite seuraa tästä.

Periaate voi olla uskottava esim. tapauksissa, joissa agentti tiedostaa tai on selvillä tietämättömyydestään.

137. Keksi sopiva esimerkki tapahtumista A_1, A_2, ..., A_n, jotka erikseen otettuina ovat kaikki todennäköisiä, mutta jotka yhdessä otettuina ovat kuitenkin yhteensopimattomia (ainakin agentin a mielestä).

Osoita, että Kripke-semantiikassa siitä, että $M, w \vDash \mathrm{K}\, A_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$, seuraa, että $M, w \vDash \mathrm{K}\, A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots A_n$. Vaikka tilannetta ei voi kuvailla Kripke-semantiikassa, jossa maailmat ovat klassisia, sitä voidaan kuvailla sopivassa ei-normaalien maailmojen semantiikassa.

138. Koska premissit ovat tosia a:n uskomusmaailmoissa, niin johtopäätöksetkin ovat. Koska ristiriita $C \wedge \neg C$ ei ole klassisissa maailmoissa tosi, tilannetta voi kuvailla normaalissa Kripke-semantiikassa ainoastaan sellaisilla malleilla, joissa tarkasteltavalla maailmalla w ei ole episteemisiä vaihtoehtoja. Tällöin a

uskoo maailmassa w lauseiden $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ja $B_1, B_2, \ldots, B_m$ lisäksi mihin tahansa muuhunkin lauseeseen, myös ristiriitoihin.

Tilannetta voidaan kuvailla paremmin sopivassa ei-normaalien maailmojen semantiikassa. Todellisuudessa mainitunlainen tilanne, missä a uskoo ristiriitaisiin premisseihin, on mahdollinen silloin, kun a ei näe, mitä premisseistä seuraa.

139. Olkoon w' sellainen maailma, että wRw'. Oletuksesta $M, w \vDash \mathrm{O}\,\mathrm{O}\,A$ seuraa melkein refleksiivisyyden perusteella, että $M, w' \vDash A$ (perustele). Täten $M, w \vDash \mathrm{O}\,A$.

140. Sijoita ko. teoreemaan B:n paikalle $\neg A$.

141. Huomaa, että kaikissa deonttisissa vaihtoehdoissa voi esimerkiksi B olla epätosi.

142. Kun millään maailmalla ei ole deonttisia vaihtoehtoja, mikään ei ole sallittua. Tällöin kaava on triviaalisti tosi kaikissa maailmoissa. Tällaisella mallilla ei voi kuitenkaan kuvailla oikeastaan minkäänlaista deonttista tilannetta.

143. Oleta, että $M, w \vDash \mathrm{O}\,A$. Kun wRw', niin tästä oletuksesta seuraa $M, w' \vDash B \to A$. (Miksi?) Siis $M, w \vDash \mathrm{O}(B \to A)$.

144. Olkoon p esimerkiksi 'Maija postittaa kirjeen' ja q 'Maija liimaa postimerkin'. Oleta, että Maijan velvollisuutena on postittaa kirje.

146. $(A?\alpha) \cup \beta$.

147. $(\neg A?\alpha)^* A?$.

148.

$$
\begin{aligned}
R(\alpha\beta) &= \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 4,5\rangle\},\\
R(\alpha^*) &= R(\alpha) \cup \{\langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 3,5\rangle\},\\
R(\beta^*) &= R(\beta) \cup \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 2,5\rangle\}.
\end{aligned}
$$

Voit piirtää kuvion.

149–150. Vrt. aikaisempiin, analogisiin tehtäviin.

151. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ dynaamisen logiikan malli ja $w \in W$. Huomaa, että $x\big(R(\alpha) \circ R(\beta)\big)y \Leftrightarrow \exists z\colon xR(\alpha)z \wedge zR(\beta)y$. Käytä nyt ko. operaattorin totuusehtoa ja $R(\alpha\beta)$:n määritelmää:

$$
\begin{aligned}
w \vDash \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle A &\Leftrightarrow \exists w' \in W\big(wR(\alpha)w' \wedge w' \vDash \langle\beta\rangle A\big)\\
&\Leftrightarrow \exists w' \in W\big(wR(\alpha)w' \wedge \exists w'' \in W(w'R(\beta)w'' \wedge w'' \vDash A)\big)\\
&\Leftrightarrow \exists w'' \in W\ \exists w' \in W\big(wR(\alpha)w' \wedge w'R(\beta)w'' \wedge w'' \vDash A\big)\\
&\Leftrightarrow \exists w'' \in W\big(w(R(\alpha) \circ R(\beta))w'' \wedge w'' \vDash A\big)\\
&\Leftrightarrow \exists w'' \in W\big(wR(\alpha\beta)w'' \wedge w'' \vdash A\big)\\
&\Leftrightarrow w \vDash \langle\alpha\beta\rangle A.
\end{aligned}
$$

152. Huomaa, että $x\big(R(\alpha) \cup R(\beta)\big)y \Leftrightarrow xR(\alpha)y$ tai $xR(\beta)y$.

153. Todetaan aluksi:

(i) $R(\alpha^*) = \bigcup_{k=0}^{\infty} R(\alpha)^k = R(\alpha)^0 \cup R(\alpha)^1 \cup R(\alpha)^2 \cup R(\alpha)^3 \cup \ldots$, missä $R^0 = \{\langle w, w\rangle \mid w \in W\}$ ja $R(\alpha)^1 = R(\alpha)$

(ii) $\forall n, m \in \mathbb{N} : R^n \circ R^m = R^{n+m}$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N} : R(\alpha)^{n+1} \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} R(\alpha)^k$,

$$\begin{array}{lllll} \text{Nyt} & wR(\alpha\alpha^*)w' & \Leftrightarrow & w(R(\alpha) \circ R(\alpha^*))w' & \\ & & \Leftrightarrow & \exists n \in \mathbb{N} : w(R(\alpha) \circ R(\alpha)^n)w' & \text{(i)} \\ & & \Leftrightarrow & \exists n \in \mathbb{N} : wR(\alpha)^{n+1}w' & \text{(ii)} \\ & & \Rightarrow & wR(\alpha^*)w' & \text{(iii)} \end{array}$$

Näin ollen $R(\alpha\alpha^*) \subseteq R(\alpha^*)$.

Olkoon $M = \langle W, R(\alpha), P\rangle$ dynaamisen logiikan malli ja $w \in W$ sellainen, että $M, w \vDash \langle\alpha^*\rangle A$, eli $\exists w' \in W : wR(\alpha^*)w' : M, w' \vDash A$.

Nyt jos $\exists w' \in W : wR(\alpha)^0 w' : M, w' \vDash A$ niin $M, w \vDash A$ sillä tällöin $w' = w$, joten disjuktion totuusehdon mukaan myös $M, w \vDash A \vee \langle\alpha\rangle\langle\alpha^*\rangle A$.

Jos taas $\nexists w' \in W : wR(\alpha)^0 w' : M, w' \vDash A$, niin oletuksen mukaan täytyy olla, että $\exists w' \in W : \exists n \in \mathbb{N} : wR(\alpha)^{n+1}w'$ ja $: M, w' \vDash A$. Edellä on osoitettu, että $wR(\alpha\alpha^*)w' \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : wR(\alpha)^{n+1}w'$, joten $M, w \vDash \langle\alpha\alpha^*\rangle A$. Tehtävän 151 tuloksen mukaan $\langle\alpha\alpha^*\rangle A \Leftrightarrow \langle\alpha\rangle\langle\alpha^*\rangle A$, siis nyt $M, w \vDash \langle\alpha\rangle\langle\alpha^*\rangle A$. Näin ollen $M, w \vDash A \vee \langle\alpha\rangle\langle\alpha^*\rangle A$.

Oletetaan sitten, että $M, w \nvDash \langle\alpha^*\rangle A$. Siis $\forall w' \in W : wR(\alpha^*)w' : M, w' \nvDash A$. Relaation $R(\alpha^*)$ refleksiivisyydestä seuraa nyt $M, w \nvDash A$ ja edellä todistetusta tuloksesta $R(\alpha\alpha^*) \subseteq R(\alpha^*)$, että myös $\forall w' \in W : wR(\alpha\alpha^*)w' : M, w \nvDash A$, joten $M, w \nvDash \langle\alpha\alpha^*\rangle A$. Tehtävän 151 tuloksen mukaan tällöin $M, w \nvDash \langle\alpha\rangle\langle\alpha^*\rangle A$, joten nyt $M, w \nvDash A \vee \langle\alpha\rangle\langle\alpha^*\rangle A$.

(Pesonen)

154. Huomaa, että $wR(A?)w'$, jos ja vain jos $w' = w$ ja $w' \vDash A$.

155. Olkoon $M = \langle W, R, P\rangle$ ja $w \in W$. Relaation $R(\alpha^*)$ määritelmästä seuraa, että jos $wR(\alpha^*)w'$, niin joillekin $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$, $wR(\alpha)w_1 \wedge w_1R(\alpha)w_2 \wedge \cdots \wedge w_nR(\alpha)w'$. Oletetaan, että $w \vDash [\alpha^*](A \to [\alpha]A)$ ja että $w' \in W$ sellainen tila, että $wR(\alpha^*)w'$, jolloin $w' \vDash A \to [\alpha]A$. Erityisesti $w \vDash A \to [\alpha]A$, sillä myös $wR(\alpha^*)w$. Jos $w \vDash A$, niin $w \vDash [\alpha]A$. Tästä taas seuraa, että $w_1 \vDash A$, koska $wR(\alpha)w_1$, joten oletuksen mukaan $w_1 \vDash [\alpha]A$, koska myös $wR(\alpha^*)w_1$. Näin jatkamalla saadaan: $w_1 \vDash A$, $w_2 \vDash A$, $\ldots$, $w_n \vDash A$ ja lopulta $w' \vDash A$. Koska w' on mielivaltainen tila, jolle $wR(\alpha^*)w'$, niin $w \vDash [\alpha^*]A$, joten $w \vDash A \to [\alpha^*]A$.

156. Esim. $M = \langle W, R, P\rangle$, missä sopivalle $w \in W$ pitää paikkansa, että $w \vDash \neg\neg A$, mutta $w \nvDash A$, sopii vastamalliksi kumpaankin kohtaan.

157. Esim. $M = \langle W, R, P\rangle$, missä sopivalle $w \in W$ pitää paikkansa, että $w \models \neg(A \wedge B)$, $w \not\models \neg A$, $w \not\models \neg B$, $w \not\models A$, $w \not\models B$. Tehtävästä seuraa, ettei vastaava de Morganin laki ole intuitionistisesti validi.

158. Esim. $M = \langle W, R, P\rangle$, missä sopivalle $w \in W$ pitää paikkansa, että $w \models \neg B \rightarrow \neg A$, $w \not\models \neg A$, $w \not\models \neg B$, $w \models A$, $w \not\models B$.

159. Ilmeinen.

160. Jos $M = \langle W, R, P\rangle$ ja $w \models A$, niin kaikille w', joille ja $w \preceq w'$, pitää paikkansa, että $w' \models A$. Näin ollen kaikille tällaisille w' pitää paikkansa, että $w' \models A \rightarrow (B \rightarrow A)$, joten $w \models A \rightarrow (B \rightarrow A)$.

161–163. Vrt. tehtävä 160.

164. (a)–(b) Materiaalisia implikaatioita. (c)–(e), (g) Nämä voidaan tulkita tiukoiksi implikaatioiksi, jos välttämättömyys tulkitaan sopivasti. Ne ovat myös relevantteja. Huomaa kuitenkin, että (g) on vain triviaalisti tosi. (f) Materiaalinen. (h)–(i) Kontrafaktuaaleja.

167. On myös K-validi.

169. On myös K-validi.

171. Olkoon A esim. 'Sokrates on ihminen'. Ensin mainitussa kohdassa olkoon B vaikka 'Sokrates on ihminen ja Sokrates ei ole ihminen'. Jälkimmäisessä olkoon B 'Sokrates on kuolematon'. Mikä tällöin olisi L?

172. (a) Oleta ensin, että jossakin maailmassa etulause p on tosi. Huomaa, että $\neg B$ on tosi maailmassa w, jos ja vain jos joudutaan systeemin S_w ulkopuolelle, ts. ei ole tarvittavaa ympyrää, jonka maailmoissa $p \rightarrow \neg q$ on tosi. Tapaus, että kaikissa maailmoissa etulause p on epätosi, ei tule kysymykseen, koska tällöin kumpikin implikaatio on kaikissa maailmoissa tosi eikä siis $\neg B$ ole maailmassa w tosi. (b)–(c) Vrt. kohta (a). (d) Voidaan: p on epätosi kaikissa maailmoissa.

174. Kaikki ovat tosia.

175. Eivät.

176. Koska $m \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} l$ ja $l \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} s$ ovat tosia, niin $m \mathrel{\Box\!\!\rightarrow} s$ on tosi riippumatta Maijan tosiasiallisesta asuinpaikasta. Säilyttää; tutki vastaavien materiaalisten implikaatioiden totuutta ympyröiden maailmoissa.