# Modaalilogiikan harjoitustehtäviä

Aatu Koskensilta

## 1 Harjoitustehtävät 16.4

### 1.1 Tehtävä 100

a) Osoitamme, että $\mathrm{Th}(F_1 \oplus F_2) \neq \mathrm{Th}(F_1) \cup \mathrm{Th}(F_2)$ vastaesimerkin avulla. Otamme kehyksiksi $F_1 = \langle \mathbb{Z}_-, \varnothing \rangle$ ja $F_1 = \langle \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \rangle$. Kehyksessä $F_1$ jokainen muotoa $\Box A$ oleva kaava on selvästi validi, kun taas $F_1$:ssä ei. Jos olisi $\mathrm{Th}(F_1 \oplus F_2) = \mathrm{Th}(F_1) \cup \mathrm{Th}(F_2)$ täytyisi siis päteä jokaisella kaavalle $A$ $F_1 \oplus F_2 \vDash \Box A$, koska $\Box A \in \mathrm{Th}(F_1)$ ja siten $\Box A \in \mathrm{Th}(F_1) \cup \mathrm{Th}(F_2)$. Mutta jos valitsemme $A = p_1 \wedge \neg p_1$ huomaamme, että $\Box A$ ei voi päteä missään $F_2$:sta $F_1 \oplus F_2$:n tulleessa maailmassa, joten $\mathrm{Th}(F_1 \oplus F_2) \neq \mathrm{Th}(F_1) \cup \mathrm{Th}(F_2)$.

b) Väite $\mathrm{Th}(F_1 \oplus F_2) = \mathrm{Th}(F_1) \cap \mathrm{Th}(F_2)$ pitää paikkansa. Ekvivalentissa muodossa väite kuuluu $F_1 \oplus F_2 \vDash A \Leftrightarrow (F_1 \vDash A$ ja $F_2 \vDash A)$.

Osoitamme, että kun $w \in F_i$, $\langle F_1 \oplus F_2, P \rangle, w \vDash A$ joss $\langle F_i, P \rangle, w \vDash A$. Oletetaan siis, että $\langle F_1 \oplus F_2, P \rangle, w \vDash A$. Induktiivisen totuusmääritelmän mukaan tiedämme, että $A$:n totuus riippuu propositiolauseiden totuudesta $w$:ssä sekä niissä maailmoissa, joihin $w$:stä pääsee. $w$:stä pääsee kuitenkin vain $F_i$:n maailmoihin, josta seuraa, että $\langle F_i, P \rangle, w \vDash A \Leftrightarrow \langle F_1 \oplus F_2, P \rangle, w \vDash A$. Kun huomioimme, että jos kaava $A$ on totta kaikissa $F_1 \oplus F_2$:n mallien maailmoissa, on se edellisen huomion mukaan totta erikseen jokaisessa $F_1$:n ja $F_2$:n mallien maailmoissa, saamme tulokseksi, että $F_1 \oplus F_2 \vDash A$ jos ja vain jos $F_1 \vDash A$ ja $F_2 \vDash A$.

### 1.2 Tehtävä 197

Osoitamme, että päättelysääntö (RR)$\frac{A \wedge B \to C}{\Box A \wedge \Box B \to \Box C}$ on johdettavissa. Oletetaan, että on päätelty $A \wedge B \to C$. Voimme silloin päätellä seuraavasti:

1. $A \wedge B \to C$ (Oletus)
2. $A \to (B \to C)$ (PL, 1)
3. $\Box A \to \Box(B \to C)$ (RM, 2)
4. $\Box(B \to C) \to (\Box B \to \Box C)$ (K)
5. $\Box A \to (\Box B \to \Box C)$ (PL, 2, 4)
6. $\Box A \wedge \Box B \to \Box C$ (PL, 5)

### 1.3 Tehtävä 203

Todistamme $\vdash_K \Box(A \wedge B) \Leftrightarrow \Box A \wedge \Box B$:

1. $A \wedge B \to A$ (PL)
2. $A \wedge B \to B$ (PL)
3. $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ (RM, 1)
4. $\Box(A \wedge B) \to \Box B$ (RM, 2)
5. $\Box(A \wedge B) \to \Box A \wedge \Box B$ (PL, 3, 4)
6. $B \to (A \to A \wedge B)$ (PL)
7. $\Box B \to \Box(A \to A \wedge B)$ (RM, 6)

8. $\Box(A \to A \wedge B) \to (\Box A \to \Box(A \wedge B))$ (K)
9. $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow \Box A \wedge \Box B$ (PL, 5, 7, 8)

### 1.4 Tehtävä 213

Todistamme induktiolla $n$:n suhteen, että $\frac{A \to B}{\Box^n A \to \Box^n B}$.

1. Kun $n = 0$ on triviaali tapaus, koska $\Box^0 A \to \Box^0 B = A \to B$.
2. Oletetaan, että väite pätee lukuun $n$ asti. Tällöin voimme siis $A \to B$:stä päätellä $\Box^n A \to \Box^n B$. Tämän jälkeen voimme jatkaa todistusta seuraavasti:
    1. $\Box^n A \to \Box^n B$ (Oletus)
    2. $\Box(\Box^n A \to \Box^n B)$ (RN, 1)
    3. $\Box(\Box^n A \to \Box^n B) \to (\Box\Box^n A \to \Box\Box^n B)$ (K)
    4. $\Box\Box^n A \to \Box\Box^n B$ (PL, 3, 2)

    mutta $\Box\Box^n A = \Box^{n+1} A$ ja $\Box\Box^n B = \Box^{n+1} B$, joten väite on todistettu.

### 1.5 Tehtävä 256

Predikaattilogiikan kaava $\forall w \exists w' P(w, w')$ määrittelee seriaalisuuden. Seriaalisuuden määrittelevä modaalilogiikan kaava puolestaan on $\Diamond(p_1 \vee \neg p_1)$. Määritelmän taustalla on seuraava huomio: maailman $w$ mielestä ristiriita voi olla mahdollinen vain jos $w$:stä ei pääse mihinkään maailmaan.

### 1.6 Tehtävä 257

Todistamme edellisen tehtävän tuloksen oikeaksi, t.s. $\langle W, R\rangle \vDash \Diamond(p_1 \vee \neg p_1) \Leftrightarrow (R \text{ on seriaalinen})$.

( $\Leftarrow$ ) Oletetaan, että $R$ on seriaalinen, t.s. $\forall w \exists w'$: $wRw'$. $p_1 \vee \neg p_1$ on lauselogiikan tautologia, joten se pätee jokaisessa maailmassa mallin propositiosymboleille määrittämästä jakaumasta riippumatta. Koska jokaisesta maailmasta pääsee jonnekin, ja koska $p_1 \vee \neg p_1$ on totta kaikkialle, pätee jokaisen maailman kohdalla $\Diamond(p_1 \vee \neg p_1)$.

( $\Rightarrow$ ) Todistamme implikaation kontrapositiivin: ($R$ ei ole seriaalinen) $\Rightarrow \langle W, R\rangle \nvDash \Diamond(p_1 \vee \neg p_1)$. Koska $R$ ei ole seriaalinen, on olemassa maailma $w$, josta ei pääse mihinkään. Mallin määrittämästä propositiosymbolien totuusjakaumasta riippumatta tällaisessa maailmassa pätee jokaiselle kaavalle $A$ on totta $\neg\Diamond A$, joten erityisesti $\neg\Diamond(p_1 \vee \neg p_1)$ on totta tällaisessa maailmassa.

## 2 Harjoitustehtävät 21.4

### 2.1 Tehtävä 211

Todistamme, että $\vdash_K (\Diamond A \to \Box B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$:

1. $(B \wedge \neg B) \to \neg A$ (PL)
2. $\Box(B \wedge \neg B) \to \Box\neg A$ (K)
3. $(\Diamond A \to \Box B) \wedge \neg(\Diamond A \to \Diamond B) \to \Diamond A \wedge \Box B \wedge \Box\neg B$ (PL, DEF$\Diamond$)
4. $\Box B \wedge \Box\neg B \leftrightarrow \Box(B \wedge \neg B)$ (tehtävä 204)
5. $\Box(B \wedge \neg B) \to \Box\neg A$
6. $\Diamond A \wedge \Box B \wedge \Box\neg B \to \neg\Diamond A$
7. $\neg((\Diamond A \to \Box B) \wedge \neg(\Diamond A \to \Diamond B))$

8. $(\Diamond A \to \Box B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$

## 2.2 Tehtävä 223

Jos $\vdash_\Sigma A \leftrightarrow B$, niin lauselogiikan avulla $\vdash_\Sigma \neg A \leftrightarrow \neg B$. Mutta tällöin voimme tehtävän 222 ekvivalenssin mukaan korvata $\neg A$:n $A^D$:llä ja $\neg B$:n $B^D$:llä, jolloin saamme $\vdash_\Sigma A^D \leftrightarrow B^D$.

## 2.3 Tehtävä 232

Todistamme $\vdash_{S5} \Box\Box(A \wedge \Diamond B) \to \Box A \wedge \Diamond B$:

1. $\Box\Box(A \wedge \Diamond B) \to \Box(A \wedge \Diamond B)$ (T)
2. $\Box(A \wedge \Diamond B) \leftrightarrow \Box A \wedge \Box\Diamond B$ (R, ks. tehtävä 230)
3. $\Box\Diamond B \to \Diamond B$ (T)
4. $\Box\Box(A \wedge \Diamond B) \to \Box A \wedge \Diamond B$ (PL,1,2,3)

## 2.4 Tehtävä 237

Todistamme kaksinkertaisella induktiolla, että $\vdash_{S5} \Box^i A \to \Diamond^j A$ kun $i, j \in \mathbb{N}$:

1. Kun $i = 0$ on helppoa todeta induktiolla $j$:n suhteen, että $\vdash_{S5} A \to \Diamond^j A$:
   i. Tapaus $j = 0$ on triviaali: $A \to A$ on tautologia ja siten johdettavissa PL:n avulla
   ii. Jos väite pitää paikkansa lukuun $j = n$ asti, pätee se myös lukuun $n + 1$ asti, koska voimme päätellä:
      1. $\Diamond^n A \to \Diamond\Diamond^n A$ (T$\Diamond$)
      2. $A \to \Diamond^n A$ (induktio-oletuksen mukaan)
      3. $A \to \Diamond\Diamond^n A$ $(= A \to \Diamond^{n+1} A)$ (1,2,PL)
2. Oletetaan, että väite pätee tapauksessa $i = n$. Osoitamme, että väite pätee myös tapauksessa $i = n + 1$ palauttamalla sen tapaukseen $i = n$:
   1. $\Box\Box^n A \to \Box^n A$ (harjoitustehtävän 228 mukaan)
   2. $\Box^n A \to \Diamond^j A$ jokaiselle $j$ induktio-oletuksen mukaan.
   3. $\Box\Box^n A \to \Diamond^j A$ $(= \Box^{n+1} A \to \Diamond^j A)$ (1,2, PL)

## 2.5 Tehtävä 247

Olkoon $\mathbf{\Sigma}$ luotettava luokan $\mathcal{C}$ suhteen ja olkoon olemassa sellainen $F \in \mathcal{C}$, että $\mathrm{Th}(F) = \mathbf{\Sigma}$. Tällöin

$$\bigcap_{F \in \mathcal{C}} \mathrm{Th}(F) = \mathbf{\Sigma}$$

Oletetaan nimittäin ettei näin ole. Koska on olemassa sellainen $F \in \mathcal{C}$, että $\mathrm{Th}(F) = \mathbf{\Sigma}$, ainoa tapa, jolla kaikkien kehysten teoreemojen leikkaus ei ole $\mathbf{\Sigma}$ on se, että jossakin kehyksessä $F \in \mathcal{C}$ ei jokin $\mathbf{\Sigma}$:n lause päde. Mutta tällöin $\mathbf{\Sigma}$ ei ole luotettava: se todistaa lauseen, joka ei ole validi jokaisessa luokan $\mathcal{C}$ kehyksessä.

## 2.6 Tehtävä 248

Oletetaan, että $M \vDash B_i$ $(i = 1, 2, ..., k)$ ja $M \vDash B_1 \wedge ... \wedge B_k \to B$. Induktiolla voidaan helposti todistaa, että $M \vDash B_i \wedge ... \wedge B_k \to B$ jos ja vain jos $M \vDash B_0$ ja $M \vDash B_1$ ja ... ja $M \vDash B_k$. Samaten induktiolla huomaamme, että $M \vDash B_1 \wedge ... \wedge B_k$ jos ja vain jos $M \vDash B_0$ ja $M \vDash B_1$ ja ... ja $M \vDash B_k$, joten oletuksen mukaan $M \vDash B_1 \wedge ... \wedge B_k$. Määritelmän mukaan $M \vDash B_1 \wedge ... \wedge B_k \to B$ jos ja vain jos jokaisessa maailmassa $w$, jossa $M, w \vDash B_1 \wedge ... \wedge B_k$, $M, w \vDash B$. Mutta oletuksen mukaan $M \vDash B_1 \wedge ... \wedge B_k$, joten jokaiselle $w$ $M, w \vDash B_1, ..., B_k$, ja siten oletuksen $M \vDash B_1 \wedge ... \wedge B_k \to B$ mukaan $M, w \vDash B$, joten $M \vDash B$.

# 3 Harjoitustehtävät 28.4

## 3.1 Tehtävä 228

Todistamme, että $\vdash_{S5} \Box A \leftrightarrow \Box\Box A$:

1. $\Box\Box A \rightarrow \Box A$ (T)
2. $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ (4)
3. $\Box A \leftrightarrow \Box\Box A$ (PL, 1, 2)

## 3.2 Tehtävä 230

Osoitamme, että $\vdash_{S5} \Box\Diamond A \leftrightarrow \Diamond A$

1. $\Box\Diamond A \rightarrow \Diamond A$ (T)
2. $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$ (5)
3. $\Box\Diamond A \leftrightarrow \Diamond A$ (PL, 1, 2)

## 3.3 Tehtävä 236

Todistamme induktiolla, että $\vdash_{S5} \Diamond^n(A \vee \neg A)$:

1. Kun $n = 1$ osoittaa seuraava todistus suoraan väitteen
   1. $A \vee \neg A$ (PL)
   2. $A \vee \neg A \rightarrow \Diamond(A \vee \neg A)$ (T$\Diamond$)
   3. $\Diamond(A \vee \neg A)$ (1,2, PL)
2. Oletetaan, että väite pitää paikkansa johonkin lukuun $n$ asti. Tällöin siis $\vdash_{S5} \Diamond^n(A \vee \neg A)$. Voimme esittää seuraavanlaisen todistuksen:
   1. $\Diamond^n(A \vee \neg A)$
   2. $\Diamond^n(A \vee \neg A) \rightarrow \Diamond\Diamond^n(A \vee \neg A)$ (T$\Diamond$)
   3. $\Diamond\Diamond^n(A \vee \neg A)$ $(= \Diamond^{n+1}(A \vee \neg A))$ (1,2, PL)

   joten väite pitää siis paikkansa myös $k = n + 1$:lle.

Matemaattisen induktion periaatteen mukaan toteamme siis, että $\vdash_{S5} \Diamond^n(A \vee \neg A)$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$.

## 3.4 Tehtävä 274

Todistamme, että $\langle W, R\rangle \vDash \Diamond\Box p \vee \Box p \Leftrightarrow$ jokaisella $w$:n maailmalla joko a) ei ole vaihtoehtoisia maailmoja tai b) jollakin sen vaihtoehtoisista maailmoista ei ole vaihtoehtoisia maailmoja.

**($\Leftarrow$)** Oletetaan, että jokainen maailma $w$ täyttää ehdon a tai b. Osoitamme, että $\langle W, R, P\rangle, w \vDash \Diamond\Box p \vee \Box p$ kummassakin tapauksessa $P$:stä riippumatta.

a) Jos maailmalle $w$ ei ole vaihtoehtoisia maailmoja, pätee $\Box p$ triviaalisti

b) Maailmalla $w$ on vaihtoehtoinen maailma $w'$, joka täyttää ehdon a. Täten siis $w \vDash \Diamond\Box p$, koska $\Box p$ on totta $w'$:ssä.

**($\Rightarrow$)** Todistamme implikaation kontrapositiivin: ($\langle W, R\rangle$:n maailmat eivät kaikki toteuta ehtoa a tai b $\Rightarrow \langle W, R\rangle \nvDash \Diamond\Box p \vee \Box p$. Valitaan maailma $w$, joka ei toteuta ehtoa a eikä ehtoa b, ja konstruoidaan propositiosymboleille totuusjakauma $P$, s.e. $\langle W, R, P\rangle, w \nvDash \Diamond\Box p \vee \Box p$ asettamalla $P = \varnothing$. Koska ehtoa a ei täyty, ei $\Box p$ voi päteä $w$:ssä. Koska ehto b ei myöskään täyty, pääsee jokaisesta maailmasta $w'$, johon $w$:stä pääsee, johonkin toiseen maailmaan. Koska näissäkään maailmoissa ei päde $p$, ei $w$:ssä päde $\Diamond\Box p$.

### 3.5 Tehtävä 300

Osoitamme, että $F \vDash \Diamond\Box A \vee \Box A \Rightarrow F \vDash \Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \to B) \to B)$. Tehtävän 274 tuloksen mukaan tiedämme, että jos $F \vDash \Diamond\Box p \vee \Box p$, niin $F$:n vaihtoehtorelaatiolla $R$ on ominaisuus: jokaisesta maailmasta $w$ ei joko a) pääse mihinkään maailmaan tai b) joillakin sen vaihtoehtoisista maailmoista ei ole lainkaan vaihtoehtoisia maailmoja. Koska eräs mahdollinen $A$:n arvo on $p$ seuraa tästä tuloksesta, että $F \vDash \Diamond\Box A \vee \Box A \Rightarrow$ jokaisella $w$:n maailmalla joko a) ei ole vaihtoehtoisia maailmoja tai b) jollakin sen vaihtoehtoisista maailmoista ei ole vaihtoehtoisia maailmoja.

Oletetaan siis, että $R$:llä on tämä ominaisuus ja olkoon $P$ jokin totuusjakauma propositiosymboleille. Otetaan nyt jokin maailma $w$. Jos $w$ toteuttaa vaihtoehdon b pätee $w \vDash \Diamond\Box A$, koska $w$:n vaihtoehtoisten maailmojen mielestä kaikki on mahdollista, sillä niiden mielestä mikään toinen maailma ei ole mahdollinen. Oletetaan siis, että $w$ toteuttaa vaihtoehdon $a$, t.s. sillä ei ole vaihtoehtoisia maailmoja. Tällöin $\Box(\Box(\Box B \to B) \to B)$ on triviaalisti totta $w$:ssä.

### 3.6 Tehtävä 301

Tiedämme, että kaava $\Diamond\Box p \to \Box p$ ei ole systeemin $\mathbf{K(VB)}$ teoreema. Kuitenkin, jos skeema

$$\Diamond\Box A \vee \Box(\Box(\Box B \to B) \to B)$$

on validi jossain kehyksessä, edellisen tehtävän (ratkaisussa osoittamattoman ekvivalenssin suunnan) mukaan myös $\Diamond\Box p \to \Box p$ on. Tästä seuraa, ettei voi olla kehysten luokkaa, joka määrittäisi kaikki $\mathbf{K(VB)}$:n teoreemat, koska kaikissa kehyksissä sekä $\mathbf{VB}$:n ja $\Diamond\Box p \to \Box p$:n pitäisi olla valideja.

### 3.7 Tehtävä 305

Olkoon $\Gamma$ maksimaalinen $\Sigma$-ristiriidaton joukko. Oletetaan, että $\Gamma'$ on sen aito laajennus, t.s. on olemassa $A \in \Gamma'$, $A \notin \Gamma$. Koska $\Gamma$ on maksimaalinen $\neg A \in \Gamma$, mutta tällöin $\Gamma'$ on $\Sigma$-ristiriitainen, koska $\vdash_\Sigma \neg(A \wedge \neg A)$.

### 3.8 Tehtävä 306

Olkoon $\Gamma$ maksimaalisesti $\Sigma$-ristiriidaton joukko.

a) Edellisen tehtävän mukaan mikään maksimaalisesti $\Sigma$-ristiriidattoman joukon laajennus ei ole $\Sigma$-ristiriidaton. Oletetaan, että $A \in \Gamma$, mutta $\neg\neg A \notin \Gamma$, mistä edellisen tuloksen mukaan seuraa, että $\Gamma \cup \{\neg\neg A\}$ on ristiriitainen. Tällöin kuitenkin $\Gamma$:kin on ristiriitainen, koska $\vdash_\Sigma A \leftrightarrow \neg\neg A$.

b) Oletetaan, että $A \in \Gamma$ ja $A \to B \in \Gamma$, mutta $B \notin \Gamma$. Tällöin siis $\Gamma \cup \{B\}$ on $\Sigma$-ristiriitainen. Mutta tästä seuraa, että $\Gamma$ on $\Sigma$-ristiriitainen, koska $\vdash_\Sigma (A \wedge (A \to B) \wedge \neg B) \to \neg A$ ja siten $\vdash_\Sigma \neg(A \wedge (A \to B) \wedge \neg B)$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa.

c) Tiedämme, että $A \in \Gamma \Rightarrow B \in G \Leftrightarrow B \in G \vee A \notin \Gamma$. Oletetaan, että $B \in \Gamma$. Tällöin jokaiselle $A$, $A \to B \in \Gamma$, koska $\vdash_\Sigma \neg(B \wedge \neg(A \to B))$. Oletetaan sitten, että $A \notin \Gamma$. Tällöin $\neg A \in \Gamma$, ja $\Gamma$:n maksimaalisuuden vuoksi myös $A \to B$, koska $\vdash_\Sigma \neg(\neg A \wedge \neg(A \to B))$. Toisen suunnan ekvivalenssista saamme edellisen tuloksen perusteella.

## 4 Harjoitustehtävät 7.5

### 4.1 Tehtävä 214

Osoitamme induktiolla $k$:n suhteen, että $\frac{A_! \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B}{\Box A_1 \wedge \Box A_2 \wedge \ldots \Box A_k \to \Box B}$ on johdettava päättelysääntö systeemissä $\mathbf{K}$.

1. Kun $k = 1$ on kyseessä sääntö RM

2. Oletetaan, että väite pitää paikkansa $k$:n asti. Tällöin voimme päätellä **K**:ssa seuraavasti:
    1. $A_1 \wedge \ldots \wedge A_{k+1} \rightarrow B$ (Oletus)
    2. $A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow (A_{k+1} \rightarrow B)$ (PL, 1)
    3. $\Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_k \rightarrow \Box(A_{k+1} \rightarrow B)$ (Induktio-oletuksen mukaan)
    4. $\Box(A_{k+1} \rightarrow B) \rightarrow (\Box A_{k+1} \rightarrow \Box B)$ (K)
    5. $\Box A_1 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge A_{k+1} \rightarrow B$ (PL, 3, 4)

## 4.2 Tehtävä 218

Osoitamme induktiolla $n$:n suhteen, että kaava $\Diamond(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots A_n) \rightarrow \Diamond A_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond A_n$ on systeemin **K** teoreema.

1. Ensimmäinen ei-triviaali tapaus on $n = 2$. Seuraavassa **K**-todistus sille:
    1. $\neg A_1 \rightarrow \neg(A_1 \wedge A_2)$ (PL)
    2. $\Box(\neg A_1 \rightarrow \neg(A_1 \wedge A_2))$ (RN, 1)
    3. $\Box(\neg A_1 \rightarrow \neg(A_1 \wedge A_2)) \rightarrow (\Box\neg A_1 \rightarrow \Box\neg(A_1 \wedge A_2))$ (K)
    4. $(\neg\Box\neg(A_1 \wedge A_2) \rightarrow \neg\Box\neg A_1)$ (PL, 2,3)
    5. $\Diamond(A_1 \wedge A_2) \rightarrow \Diamond A_1$ (4 toisin kirjoitettuna)
    6. $\neg A_1 \rightarrow \neg(A_1 \wedge A_2)$ (PL)
    7. $\Box(\neg A_1 \rightarrow \neg(A_1 \wedge A_2))$ (RN, 6)
    8. $\Box(\neg A_1 \rightarrow \neg(A_1 \wedge A_2)) \rightarrow (\Box\neg A_1 \rightarrow \Box\neg(A_1 \wedge A_2))$ (K)
    9. $(\neg\Box\neg(A_1 \wedge A_2) \rightarrow \neg\Box\neg A_1)$ (PL, 7,8)
    10. $\Diamond(A_1 \wedge A_2) \rightarrow \Diamond A_1$ (9 toisin kirjoitettuna)
    11. $\Diamond(A_1 \wedge A_2) \rightarrow \Diamond A_1 \wedge \Diamond A_2$ (PL, 10, 5)
2. Oletetaan, että väite pitää paikkansa lukuun $n$ asti. Tällöin voimme päätellä **K**:ssa seuraavasti:
    1. $\Diamond(A_1 \wedge \ldots \wedge (A_n \wedge A_{n+1}) \rightarrow \Diamond A_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond(A_n \wedge A_{n+1})$ (oletus)
    2. $\Diamond(A_n \wedge A_{n+1}) \rightarrow \Diamond A_{n+1} \wedge \Diamond A_{n+1}$ yllä olevan todistusskeeman mukaan
    3. $\Diamond(A_1 \wedge \ldots \wedge (A_n \wedge A_{n+1}) \rightarrow \Diamond A_1 \wedge \ldots \wedge \Diamond A_n \wedge \Diamond A_{n+1}$ (PL, 1, 2)

## 4.3 Tehtävä 264

Todistamme, että kaava $(\Diamond(p \wedge q) \wedge \Diamond(p \wedge r) \wedge \Diamond(q \wedge r)) \rightarrow \Diamond(p \wedge q \wedge r)$ määrittää ominaisuuden: jokaisella maailmalla on korkeintaan kaksi vaihtoehtoista maailmaa, t.s.

> $\langle W, R \rangle \vDash (\Diamond(p \wedge q) \wedge \Diamond(p \wedge r) \wedge \Diamond(q \wedge r)) \rightarrow \Diamond(p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow \forall w(w$:n vaihtoehtoisten maailmojen lukumäärä on $\leqslant 2)$

**($\Leftarrow$)** Oletetaan, että maailman $w$ vaihtoehtoisten maailmojen määrä on $\leqslant 2$. Tällöin on kolme vaihtoehtoa:

i. vaihtoehtoisten maailmojen määrä on 0. Tällöin $\Diamond(p \wedge q) \wedge \Diamond(p \wedge r) \wedge \Diamond(q \wedge r)$ ei ole totta, jolloin implikaatio on triviaalisti tosi.

ii. vaihtoehtoisten maailmojen määrä on 1. Tällöin jos $\Diamond(p \wedge q) \wedge \Diamond(p \wedge r) \wedge \Diamond(q \wedge r)$ on tosi $w$:ssä, on myös $\Diamond(p \wedge q \wedge r)$ totta.

iii. vaihtoehtoisten maailmojen määrä on 2. Teemme seuraavan havainnon, joka voidaan perustella esimerkiksi kyyhkyslakkaperiaatteen avulla tai listaamalla kaikki kombinaatiot: valitsimmepa mitkä tahansa kaksi joukkoa joukoista $\{p, q\}$, $\{p, r\}$ ja $\{q, r\}$, niiden yhdiste on joukko $\{p, q, r\}$. Jos $\Diamond(p \wedge q) \wedge \Diamond(p \wedge r) \wedge \Diamond(q \wedge r)$ on $w$:ssä totta, tällöin joukot $\{p, q\}$, $\{p, r\}$ ja $\{q, r\}$ ovat alkioittain tosia $w$:ssä saavutettavissa kahdessa maailmassa ja siten kahden näistä unionin alkiot ovat tosia vähintään toisessa näistä maailmoista. Mutta havaintomme mukaan tällöin kaikki joukon $\{p, r, q\}$ alkiot ovat tosia tässä maailmassa, ja siten $\Diamond(p \wedge q \wedge r)$ on tosi $w$:ssä.

**($\Rightarrow$)** Todistamme implikaation kontrapositiivin: $\langle W, R\rangle \nvDash (\Diamond(p \wedge q) \wedge \Diamond(p \wedge r) \wedge \Diamond(q \wedge r)) \rightarrow \Diamond(p \wedge q \wedge r) \Rightarrow \exists w$($w$:stä pääsee useampaan kuin kolmeen maailmaan). Olkoon siis $w$ jokin maailma, josta pääsee maailmoihin $w_1$, $w_2$ ja $w_3$ (ja tietysti mahdollisesti muihin maailmoihin, mutta tällä ei ole konstruktiomme kannalta väliä). Asetetaan $P(p) = w_1, w_2$, $P(q) = w_1, w_3$, $P(r) = w_2, w_3$. Selvästikin $\langle W, R, P\rangle, w \vDash \Diamond(p \wedge q) \wedge \Diamond(p \wedge r) \wedge \Diamond(q \wedge r)$, mutta kuitenkin $\langle W, R, P\rangle \nvDash \Diamond(p \wedge q \wedge r)$.

## 4.4 Tehtävä 269

Osoitamme, että $\langle W, R\rangle \vDash \Diamond^k\Box^k p \rightarrow \Box^k\Diamond^k p \Leftrightarrow R$ toteuttaa ehdon $\left(\begin{smallmatrix} k & k \\ k & k \end{smallmatrix}\right)$. Ominaisuuden $\left(\begin{smallmatrix} k & k \\ k & k \end{smallmatrix}\right)$ määrittelee predikaattilogiikan kaava

$$\begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix} R \Leftrightarrow \forall w_1, w_2, w_3 (w_1 R^k w_2 \wedge w_1 R^k w_3 \rightarrow \exists w_4 (w_2 R^k w_4 \wedge w_3 R^k w_4)$$

Intuitiivisesti $\left(\begin{smallmatrix} k & k \\ k & k \end{smallmatrix}\right)$ sanoo, että jos $w_2$ ja $w_3$ ovat sellaiset maailmat, joihin $w_1$:stä pääsee $k$:lla hypyllä, on olemassa maailma $w_4$, johon sekä $w_2$:sta, että $w_3$:sta pääsee $k$:lla askeleella.

**($\Leftarrow$)** Oletetaan, että $R$ täyttää ehdon $\left(\begin{smallmatrix} k & k \\ k & k \end{smallmatrix}\right)$. Väitämme, että jokaiselle $\langle W, R\rangle \vDash \Diamond^k\Box^k p \rightarrow \Box^k\Diamond^k p$. Olkoon $w$ jokin maailma, jossa implikaation etujäsen on totta – muutoin implikaatio tietysti pätee triviaalisti. $\Diamond^k\Box^k p$ voi olla tosi ainoastaan maailmassa $w$, josta on $k$:n askeleen ketju saavutettavia maailmoja. Ehdon $\left(\begin{smallmatrix} k & k \\ k & k \end{smallmatrix}\right)$ perusteella tämän ketjun viimeisestä maailmasta $w_2$ pääsee $k$:lla askeleella maailmaan $w_4$ ja jokaisessa maailmassa, johon $w_2$:sta pääsee on $p$ totta. Pidetään $w_2$ kiinnitettynä ja käydään läpi kaikki maailmat $w_3$ johon $w$:stä pääsee $k$:lla askeleella. Ehdon $\left(\begin{smallmatrix} k & k \\ k & k \end{smallmatrix}\right)$ mukaan jokaisella maailmalla $w_3$ ja kiinnitetyllä $w_2$:lla on yhteinen maailma $w_4$, johon niistä pääsee $k$:lla askeleella. Mutta koska $p$ on totta jokaisessa maailmassa, johon $w_2$:sta pääsee $k$:lla askeleella, on $\Diamond^k p$ totta $w_3$:ssa. Siispä $\Box^k\Diamond^k p$ on totta maailmassa $w$.

**($\Rightarrow$)** Osoitamme loogisesti ekvivalentin väitteen: (ei $\left(\begin{smallmatrix} k & k \\ k & k \end{smallmatrix}\right) R) \Rightarrow \langle W, R\rangle \nvDash \Diamond^k\Box^k p \rightarrow \Box^k\Diamond^k p$. Koska ei $\left(\begin{smallmatrix} k & k \\ k & k \end{smallmatrix}\right) R$ täytyy olla olemassa maailma $w$, s.e. siitä pääsee $k$:lla askeleella maailmoihin $w_2$ ja $w_3$, mutta $w_2$:sta ja $w_3$:sta ei pääse $k$:lla askeleella samaan maailmaan $w_4$. Asetetaan nyt $P(p) = \{w' | w_2$:sta pääsee $k$:lla askeleella maailmaan $w'\}$. Nyt $\langle W, R, P\rangle$, $w \vDash \Diamond^k\Box^k p$, koska $\Box^k p$ on totta $w_2$:ssa, johon $w$:stä pääsee $k$:lla askeleella, mutta $\langle W, R, P\rangle, w \nvDash \Box^k\Diamond^k p$, koska maailmassa $w_3$, johon $w$:stä pääsee $k$:lla askeleella, ei ole totta $\Diamond^k p$. Näin ollen $\langle W, R\rangle \nvDash \Diamond^k\Box^k p \rightarrow \Box^k\Diamond^k p$.

## 4.5 Tehtävä 309

Kaava D

$$\Box A \rightarrow \Diamond A$$

on luotettava niiden kehysten luokassa, jotka toteuttavat seuraavan ehdon: jokaiselle maailmalle on olemassa jokin vaihtoehtoinen maailma. Merkitään tätä kehysten luokkaa merkinnällä $\mathcal{C}$.

Täydellisyyden todistamiseksi on todistettava, että KD:n kanoninen kehys kuuluu luokkaan $\mathcal{C}$. Ehto $\Box A \to \Diamond A$ sanoo, että jos $\Box A \in w$, niin $\Diamond A \in w$. Väitämme, että kanoninen vaihtoehtorelaatio $R_{\mathrm{KD}}$ on sellainen, että jokaiselle maailmalle on olemassa jokin vaihtoehtoinen maailma.

D:n mukaan jos $\Box A \in w$, niin $\neg\Box\neg A \in w$ ja siten $\Box\neg A \notin w$. Tällöin kuitenkin joukko $\{B|\Box B \in w\}$ on **KD**-ristiriidaton. Oletetaan nimittäin, että $\{B|\Box B \in w\}$ on **KD**-ristiriitainen, t.s. on olemassa kaavat $B_1, ..., B_n$, s.e. $\Box B_i \in w$ ja $\vdash_{\mathrm{KD}} \neg(B_1 \wedge ... \wedge B_n)$. Säännön RN mukaan tällöin $\vdash_{\mathrm{KD}} \Box\neg(B_1 \wedge ... \wedge B_n)$. Mutta jo **K**:ssa voidaan todistaa, että $\Box B_1 \wedge ... \wedge \Box B_n \to \Box(B_1 \wedge ... \wedge B_n)$, joten $\Box(B_1 \wedge ... \wedge B_n) \in w$. Tällöin kuitenkin $w$ on **KD**-ristiriitainen, sillä $\vdash_{\mathrm{KD}} \neg(\Box(B_1 \wedge ... \wedge B_n) \wedge \neg\Diamond(B_1 \wedge ... \wedge B_n)) \Leftrightarrow \vdash_{\mathrm{KD}} \neg(\Box(B_1 \wedge ... \wedge B_n) \wedge \Box\neg(B_1 \wedge ... \wedge B_n))$. Täten $\{B|\Box B \in w\}$:lä on maksimaalisia ristiriidattomia laajennuksia, jotka ovat $w$:n vaihtoehtoisia maailmoja. Koska **KD**:n kanoninen kehys kuuluu luokkaan $\mathcal{C}$, jonka suhteen **KD** on luotettava, on **KD** täydellinen.