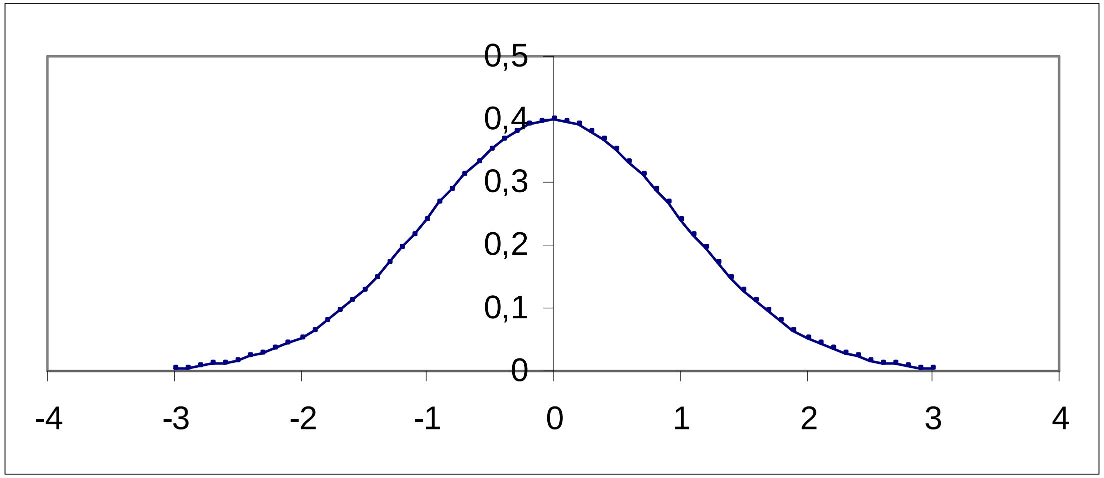
MTTTP1, luento 26.3.2019

7.4 Normaalijakauma (kertausta ja täydennystä)

$Z \sim N(0, 1)$, tiheysfunktion kuvaaja



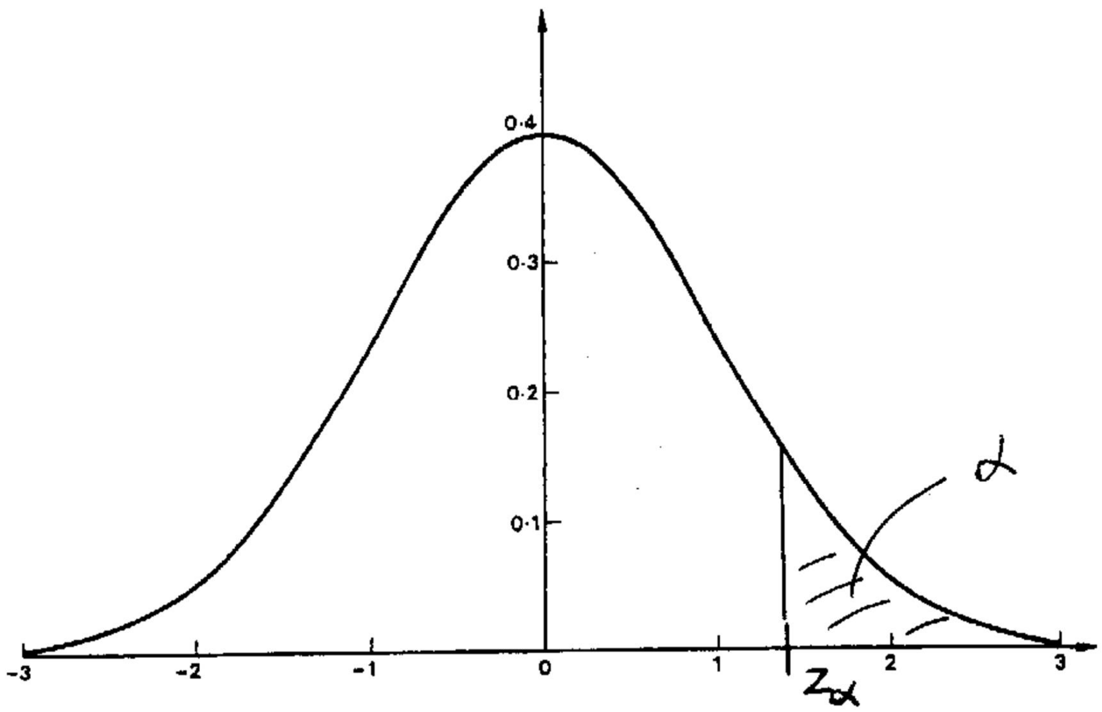
Taulukosta

$P(Z \geq 1{,}6449) = 0{,}05$, $P(Z \leq -1{,}6449) = 0{,}05$

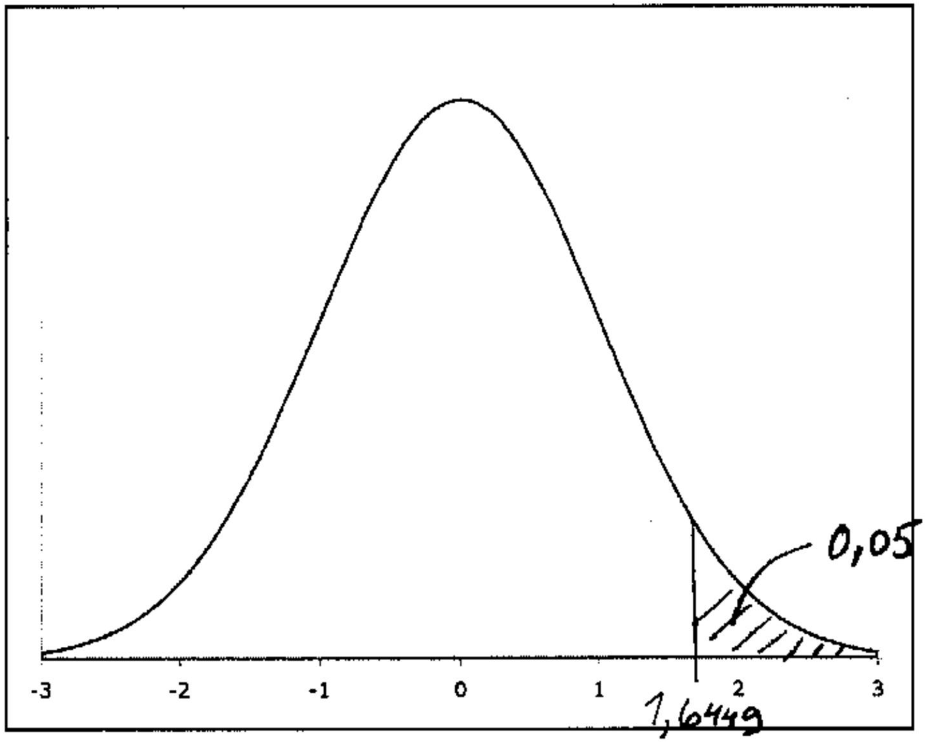
$P(Z \geq 1{,}96) = 0{,}025$, $P(Z \leq -1{,}96) = 0{,}025$

$P(Z \geq 2{,}3264) = 0{,}01$, $P(Z \leq -2{,}3264) = 0{,}01$

Olkoon Z ~ N(0, 1). Määritellään z_α siten, että $P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$.



Esim. 7.4.3.

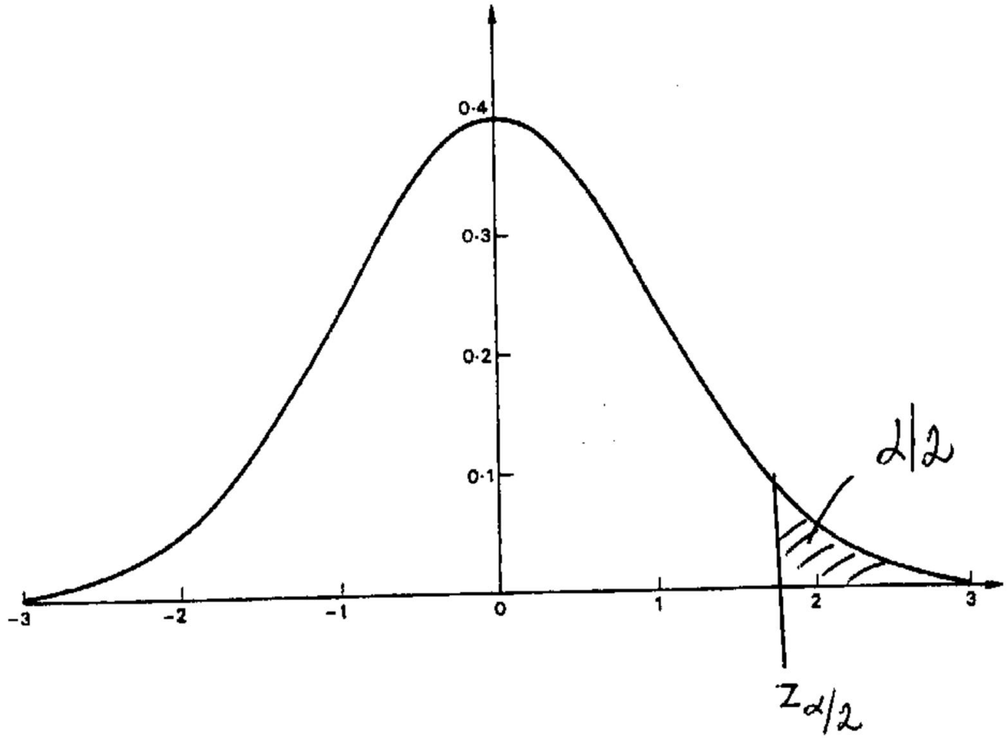


$z_{0,05} = 1,6449$

$z_{0,025} = 1,96$

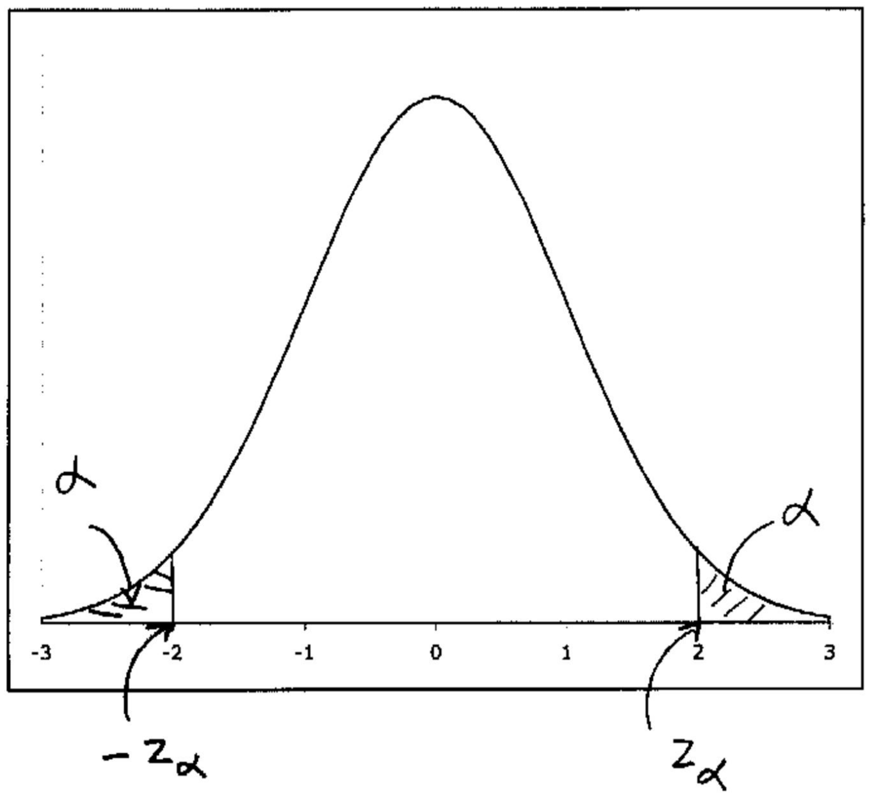
$z_{0,01} = 2,3264$

Määritellään $z_{\alpha/2}$ siten, että $P(Z \geq z_{\alpha/2}) = \alpha/2$.

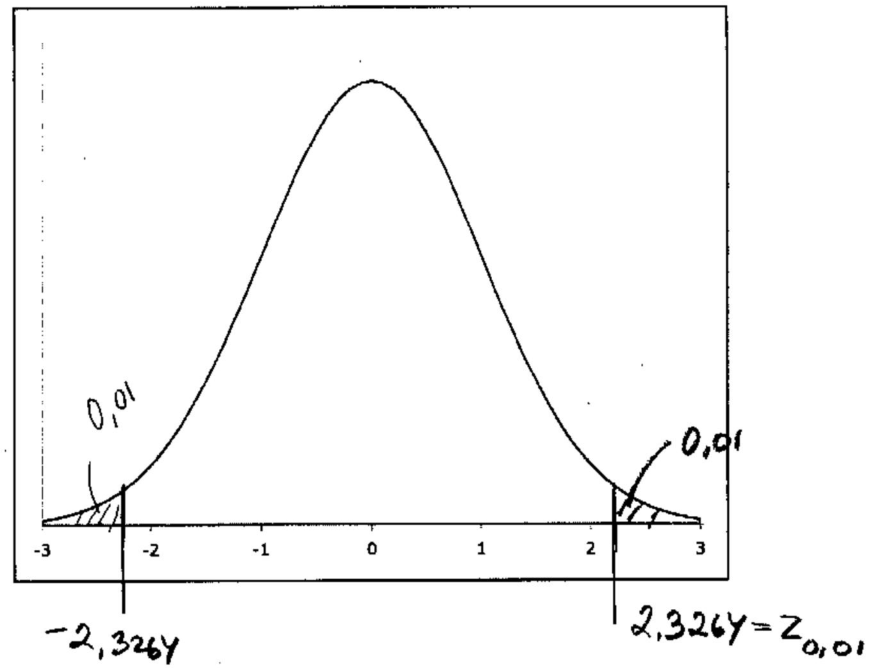


Esim. $z_{0,05/2} = z_{0,025} = 1,96$

Standardoitu normaalijakauman symmetrinen nollan suhteen



Esim. 7.4.4.



7.5 Satunnaisotos, otossuure ja otantajakauma

Päätelmät populaatiosta otoksen perusteella

- puolueen kannatus
- kynttilöiden keskimääräinen palamisaika
- asuntojen keskimääräiset neliöhinnat keskustassa ja lähiössä

Miten päättely tehdään? Miten tulosten luotettavuutta voidaan arvioida?

Päättely tehdään satunnaisotoksen perusteella.

Satunnaismuuttujajono $X_1, X_2, \ldots, X_n$ on satunnaisotos, jos X_i:t ovat riippumattomia ja noudattavat samaa jakaumaa.

Esim. Satunnaisotos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ normaalijakaumasta $N(\mu, \sigma^2)$. Tällöin jokainen X_i noudattaa normaalijakaumaa parametrien μ, σ^2 ja X_i:t ovat toisistaan riippumattomia.

Otossuure on satunnaisotoksen perusteella määritelty funktio.

Olkoon satunnaisotos X_1, X_2, ..., X_n normaalijakaumasta N(μ, σ^2), tällöin

$\bar{X}$ ~ N(μ, σ^2/n), kaava (6).

Otoskeskiarvo on otossuure, jonka todennäköisyysjakauma tiedetään. Se on normaalijakauma, havainnollistaminen simuloiden

http://onlinestatbook.com/stat_sim/sampling_dist/index.html

Olkoon populaatiossa π % tietyn tyyppisiä alkioita ja p = tietyn tyyppisten alkioiden % -osuus otoksessa.

Tällöin

$$p \sim N(\pi, \pi(100-\pi)/n)\text{, likimain, kaava (7).}$$

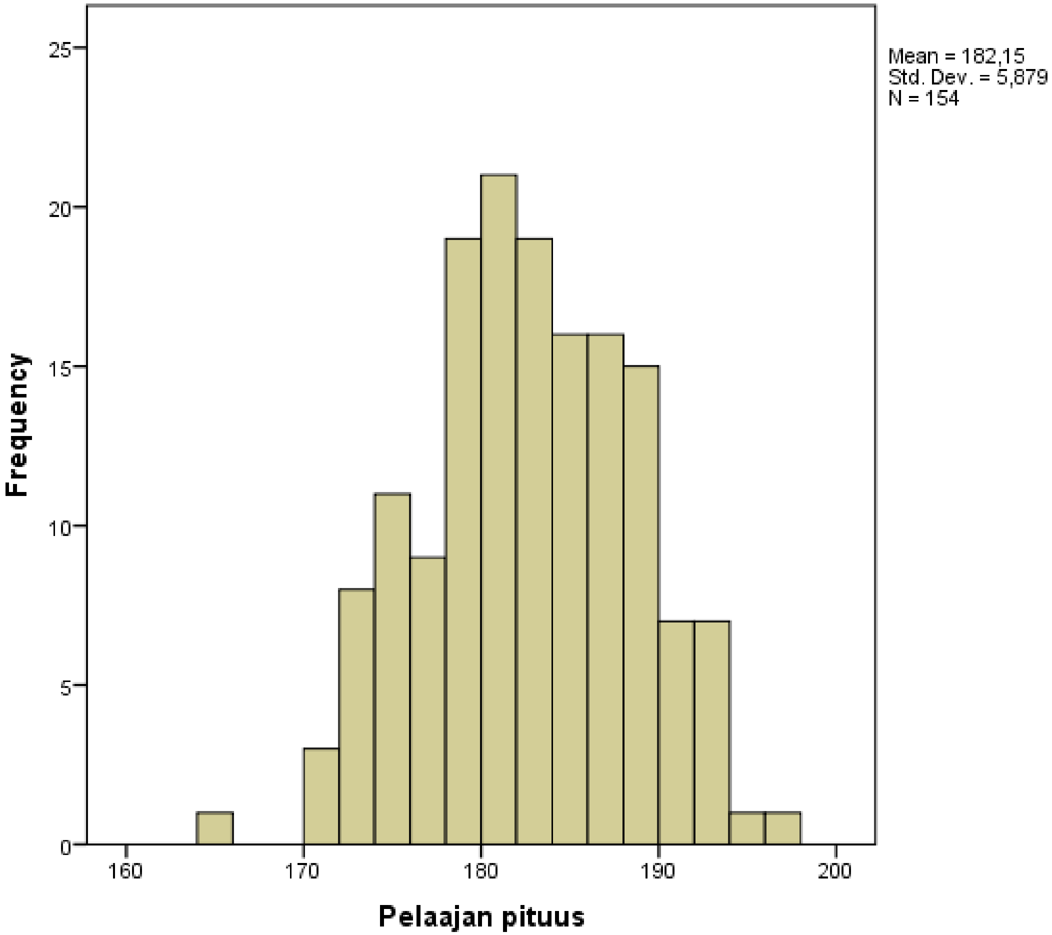
Viallisten prosenttiosuus otoksessa (p) on otossuure, jonka jakauma on likimain normaalijakauma.

Otossuureiden jakaumia käytetään päättelyyn liittyvien tulosten luotettavuuden arvioinnissa.

7.6 Piste-estimointi ja luottamusvälejä

Esim. Vuonna 2007 suomalaisen miesten keskipituuden arvioitiin olevan 179,6 cm, naisten 165,9, http://fi.wikipedia.org/wiki/Ihmisen_pituus#Ihmisten_keskipituus_eri_maissa

Esim. Jalkapalloilijat 2006, jalkapalloilijoiden keskipituuden arviointi. Arvioidaan keskipituuden olevan 182,15 cm.



Esim. Puolueen kannatusarviot,
https://yle.fi/uutiset/3-10387592 (6.9.2018)

Arvioidaan SDP:n kannatuksen olevan 20,3 %.

Estimointi

populaation tuntemattoman parametrin arviointia otossuureen avulla (piste-estimointi)

Estimaattori

otossuure, jolla estimoidaan tuntematonta parametria

Estimaatti

estimaattorin arvo (tehdyn otoksen perusteella laskettu)

Estimaattorin keskivirhe

estimaattorin hajonta

Estimoitava parametri	Esti-maattori	Estimaattorin keskivirhe	Estimoitu keskivirhe
μ	$\bar{X}$	$\sigma/\sqrt{n}$	$s/\sqrt{n}$
π	p	$\sqrt{\pi(100-\pi)/n}$	$\sqrt{p(100-p)/n}$
σ	s		

Esim. Puolueen kannatuksen arviointi

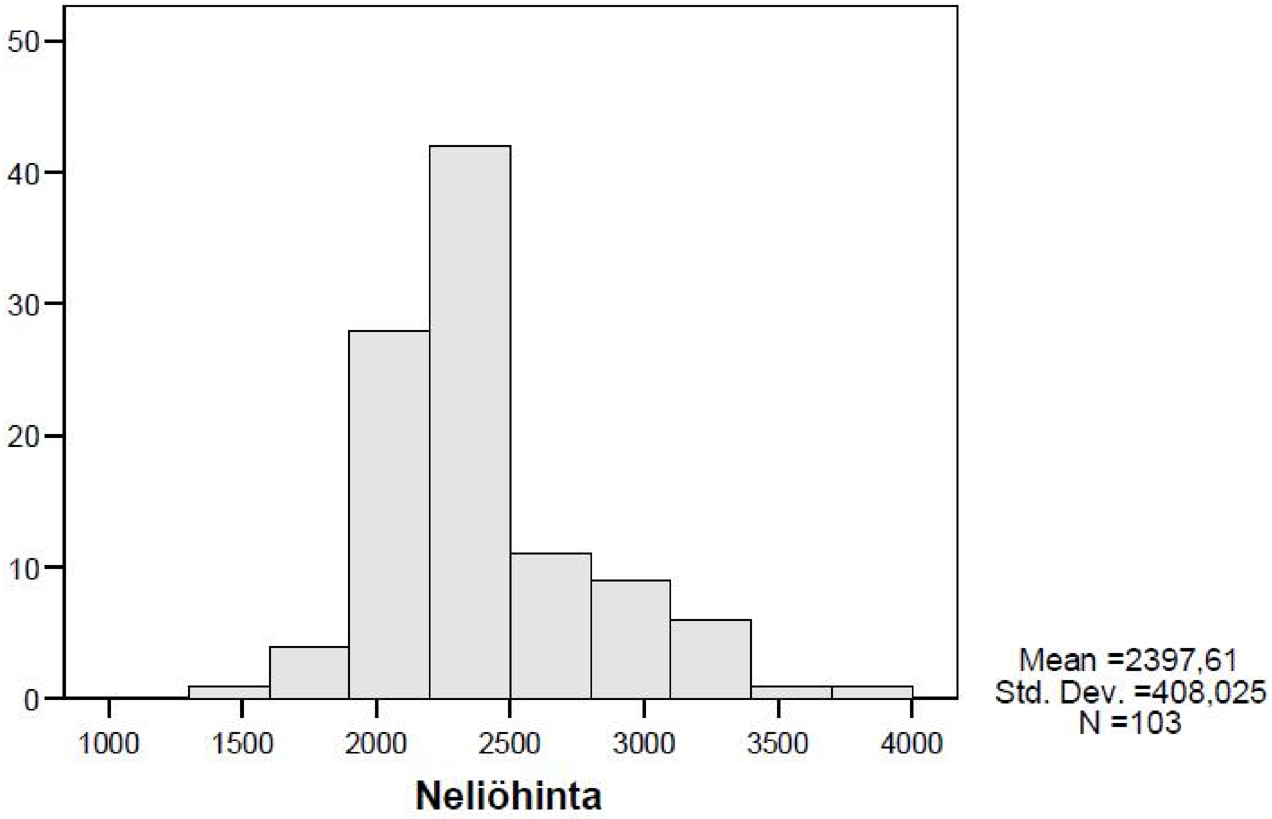
$p = 20{,}3$ %,

$n = 1460$ (kantansa ilmoittaneet).

Kannatuksen estimoitu keskivirhe

$$\sqrt{20{,}3(100-20{,}3)/1460} = 1{,}05.$$

Esim. 7.6.1. Kerrostalohuoneistojen keskimääräisen neliöhinnan estimointi, $\bar{x}$ = 2398, s = 408, joten estimoitu keskivirhe on $408/\sqrt{103}$ = 40,2.



Esim. Jalkapalloilijoiden keskipituuden estimoitu keskivirhe $5{,}879/\sqrt{154} = 0{,}474$.

Myös nk. luottamisvälin avulla voidaan arvioida populaation tuntematonta parametria, tällöin kyse väliestimoinnista.

Muodostetaan väli, joka peittää parametrin etukäteen valitulla todennäköisyydellä, nk. luottamustasolla.

Luottamusväli on satunnaisväli, joka sisältää estimoitavan parametrin todennäköisyydellä $1 - \alpha$. Valitaan α esim. 0,05 tai 0,01. Tällöin kyse 95 %:n tai 99 %:n luottamusvälistä.

7.6.1 Prosenttiosuuden luottamusväli

Kaava (8), 100(1 - α) %:n luottamusväli prosenttiosuudelle

$$p \pm z_{\alpha/2}\sqrt{p(100-p)/n}$$

95 %:n luottamusväli, α = 0,05, $z_{0,05/2} = z_{0,025} = 1,96$

99 %:n luottamusväli, α = 0,01, $z_{0,01/2} = z_{0,005} = 2,5758$

Esim. 7.6.4. Satunnaisesti valituista 100 henkilöstä puoluetta kannatti 18 %. Puolueen kannatuksen 95 %:n luottamusväli

$$18 \pm 1{,}96\sqrt{18(100-18)/100}$$

$$18 \pm 7{,}5$$

Arvioidaan kannatuksen olevan välillä 10,5 – 25,5. Virhemarginaali ±7,5 %-yksikköä.

Esim. Puolueen kannatusarviot ja virhemarginaali, Puolueen kannatusarviot, Puolueen kannatusarviot, https://yle.fi/uutiset/3-10387592 (6.9.2018)

Esim. Kahvin myyjä väittää, että 15 % kahvin juojista valitsee kahvimerkin hinnan perusteella. Tutkitaan myyjän väitettä. Tehdään tutkimus, jossa 250 kahvin juojalta kysytään kahvimerkin valintaan vaikuttavia tekijöitä. Vastanneista 25 valitsi kahvinsa hinnan perusteella. Uskotko myyjän väitteen?

Nyt $n = 250$, $p = 100 \cdot 25/250 = 10$

95 %:n luottamusväli hinnan perusteella valintansa tekevien prosenttiosuudelle

$$10 \pm 1{,}96\sqrt{10(100-10)/250}$$

$$10 \pm 3{,}7$$

Koska 15 ei kuulu luottamusvälille, ei uskota väitettä.

99 %:n luottamusväli

$$10 \pm 2{,}5758\sqrt{10(100-10)/250}$$

$$10 \pm 4{,}9,$$

sama päättely.