Yleistettyjen kvanttorien pelikarakterisaatio

0.1. Määritelmä. a) Aakkoston τ yleistetty kvanttori Q on *monotoninen*, jos seuraava ehto pätee: Oletetaan, että $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathrm{Str}(\tau)$ ja kaikilla $R \in \tau$ on voimassa $R^{\mathfrak{A}} \subset R^{\mathfrak{B}}$. Tällöin jos $\mathfrak{A} \in K_{\mathsf{Q}}$, niin $\mathfrak{B} \in K_{\mathsf{Q}}$.

b) Kvanttoria $\widetilde{\mathsf{Q}}$ kutsutaan aakkoston τ kvantorin Q *monotonisoinniksi*, jos on olemassa sellainen nimienvaihto $f\colon \tau \to \sigma$, että

1) $\tau \cap \sigma = \emptyset$,
2) $\tau \cup \sigma$ on $\widetilde{\mathsf{Q}}$:n aakkosto
   ja
3) $K_{\widetilde{\mathsf{Q}}}$ on niiden $\tau \cup \sigma$-mallien $\mathfrak{M}$ luokka, joille
   a) Jokaisella $R \in \tau$ pätee $R^{\mathfrak{M}} \cup f(R)^{\mathfrak{M}} = \mathrm{Dom}(\mathfrak{M})$ ja
   b) $\mathfrak{M}\restriction\tau \in K_{\mathsf{Q}}$ tai jollakin $R \in \tau$ pätee $R^{\mathfrak{M}} \cap f(R)^{\mathfrak{M}} \neq \emptyset$

0.2. Määritelmä. Olkoot $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \in \mathrm{Str}(\sigma)$ ja Q yleistetty kvanttori, jonka aakkosto on τ. Osittaisen isomorfismin $p \in \mathrm{Part}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ sanotaan Q-*laajentuvan monotonisesti puolin ja toisin joukkoon* $I \subset \mathrm{Part}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, jos seuraava pätee: Jokaista $\mathfrak{A} \in K_{\mathsf{Q}}$, $\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{M})$, vastaa sellainen $\mathfrak{B} \in K_{\mathsf{Q}}$, $\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{N})$, että kaikilla $R \in \tau$ ja $\bar{b} \in R^{\mathfrak{B}}$ on olemassa sellainen $q \in I$, että $q \supset p$, $\mathrm{rg}(\bar{b}) \subset \mathrm{rg}(q)$ ja $q^{-1} \circ \bar{b} \in R^{\mathfrak{A}}$. Vastaavasti jokaista $\mathfrak{B} \in K_{\mathsf{Q}}$, $\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{N})$ kohti on olemassa sellainen $\mathfrak{A} \in K_{\mathsf{Q}}$, $\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{M})$, että kaikilla $R \in \tau$ ja $\bar{a} \in R^{\mathfrak{A}}$ on olemassa $r \in I$, jolle $r \supset p$, $\mathrm{rg}(\bar{a}) \subset \mathrm{dom}(r)$ ja $r \circ \bar{a} \in R^{\mathfrak{B}}$.

0.3. Lemma. *Olkoot $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \in \mathrm{Str}(\sigma)$ ja $\mathcal{L}$ Q-suljettu logiikkka, missä aakkoston τ kvanttori on monotoninen. Kun $R \in \tau$, olkoon $\psi_R(\bar{x}_R, \bar{y})$ logiikan $\mathcal{L}$ σ-kaava, missä $|\bar{x}_R| = \#(R)$. Oletetaan, että kaikilla $q \in I$, $R \in \tau$ ja $\bar{c} \in \mathrm{dom}(q)$ pätee*

$$\mathfrak{M} \models \psi_R[\bar{c}] \iff \mathfrak{N} \models \psi_R[q \circ \bar{c}].$$

Oletetaan vielä, että $p \in \mathrm{Part}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ Q-laajentuu monotonisesti puolin ja toisin joukkoon I. Tällöin logiikan $\mathcal{L}$ σ-kaavalle $\varphi(\bar{y}) = Q(\bar{x}_R\psi_R)_{R\in\tau}$ ja mielivaltaiselle jonolle $\bar{a} \in \mathrm{dom}(p)^{|\bar{y}|}$ pätee

$$\mathfrak{M} \models \varphi_R[\bar{a}] \iff \mathfrak{N} \models \varphi_R[p \circ \bar{a}]. \quad \square$$

0.4. Määritelmä. *Olkoon $\mathcal{Q}$ joukko yleistettyjä kvanttoreita ja $w\colon \mathcal{Q} \cup \{\exists\} \to \mathbb{N}$.*

a) *Logiikan $\mathsf{FO}(\mathsf{Q})$ lauseen φ painolla w painotettu kvanttoriaste $\mathrm{qr}_w(\varphi)$ määritellään induktiivisesti seuraavasti:*
   1) $\mathrm{qr}_w(\varphi) = 0$, *jos φ on atomilause,*
   2) $\mathrm{qr}_w(\neg\varphi) = \mathrm{qr}_w(\varphi)$ *ja* $\mathrm{qr}_w(\varphi \wedge \psi) = \max\{\mathrm{qr}_w(\varphi), \mathrm{qr}_w(\psi)\}$, *kun* $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}(\mathsf{Q})$.
   3) $\mathrm{qr}_w(Q(\bar{x}_R\psi_R)_{R\in\tau}) = \sup\{\, \mathrm{qr}_w(\psi_R) \mid R \in \tau \,\} + w(\mathsf{Q})$, *kun* $\mathsf{Q} \in \mathcal{Q} \cup \{\exists\}$, *$\tau$ on Q:n aakkosto ja* $\psi_R \in \mathsf{FO}(\mathsf{Q})$, *kun* $R \in \tau$.

b) *Mallit $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \in \mathrm{Str}(\sigma)$ ovat w:llä <u>painotettuun kavnttoriasteeseen r saakka ekvivalentteja</u>, $\mathfrak{M} \equiv_{r;w} \mathfrak{N}\,(\mathsf{FO}(\mathcal{Q}))$, jos kaikille $\varphi \in \mathsf{FO}(\mathcal{Q})[\sigma]$, $\mathrm{qr}_w(\varphi) \leq r$, pätee $\mathfrak{M} \models \varphi$, joss $\mathfrak{N} \models \varphi$.*

0.5. Lemma. *Olkoon $\mathcal{Q}$ äärellinen joukko Lindströmin kvanttoreita, τ äärellinen aakkosto, joka ei sisällä funktiosymboleita, ja $w\colon \mathcal{Q} \cup \{\exists\} \to \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{\emptyset\}$. Tällöin lauseita $\varphi \in \mathsf{FO}(\mathcal{Q})[\tau]$, $\mathrm{qr}_w(\varphi) \leq k$, on loogista ekvivalenssia vaille vain äärellinen määrä, kun $k \in \omega$.* $\square$

0.6. Määritelmä. Olkoon $\mathcal{Q}$ joukko yleistettyjä kvanttoreita ja $w\colon \mathcal{Q} \cup \{\exists\} \to \mathbb{N}$. Lause $\varphi \in \mathsf{FO}(\mathcal{Q})[\tau]$ on kielessä $\mathsf{FO}(\mathcal{Q})[\tau]$ *painolla w painotettuun kvanttoriasteeseen $k \in \omega$ saakka täydellinen*, jos $\mathrm{qr}_w(\varphi) \leq k$ ja kaikilla $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \in \mathrm{Str}(\tau)$ pätee:

$$\text{jos } \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models \varphi, \text{ niin } \mathfrak{M} \equiv_{k;w} \mathfrak{N}\,(\mathsf{FO}(\mathcal{Q})).$$

Kun puhutaan τ-kaavan $\psi(\bar{x})$ täydellisyydestä johonkin painotettuun kvanttoriasteeseen saakka, tarkoitetaan ψ:n täydellisyyttä lauseena aakkostossa $\tau \cup \mathrm{rg}(\bar{x})$.

0.7. Seuraus. Olkoot $\mathcal{Q}$, τ ja w kuten edellisessä lemmassa. Tällöin kaikilla $\mathfrak{M} \in \mathrm{Str}(\tau)$ ja $\kappa \in \mathbb{N}$ on olemassa kielessä $\mathsf{FO}(\mathcal{Q})[\tau]$ painolla w painotettuun kvanttoriasteeseen saakka täydellinen ψ, jolle $\mathfrak{M} \models \psi$. $\square$

0.8. Määritelmä. Olkoon $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \in \mathrm{Str}(\sigma)$, κ ordinaali, $\mathcal{Q}$ joukko yleistettyjä kvanttoreita ja $w\colon \mathcal{Q} \cup \{\exists\} \to \mathbb{N}$. Jono $(I_i)_{i \in \kappa}$ on mallien $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{N}$ välinen *monotoninen osittaisten isomorfismien w, $\mathcal{Q}$-systeemi*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

0) Jokaisella $i \in \kappa$ pätee $\emptyset \neq I_i \subset \mathrm{Part}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$;
1) jono $(I_i)_{i \in \kappa}$ on laskeva;
2) kun $i, j \in \kappa$, $\mathsf{Q} \in \mathcal{Q} \cup \{\exists\}$ ja $j = i + w(\mathsf{Q})$, niin jokainen $p \in I_j$ Q-laajentuu monotonisesti puolin ja toisin joukkoon I_i.

Kun $k = 1 + \ell$, tätä merkitään $(I_i)_{i \in \kappa}\colon \mathfrak{M} \cong^{\mathrm{mon}}_{\ell;w,\mathcal{Q}} \mathfrak{N}$ tai jos vain jonon olemassaolo on oleellista, $\mathfrak{M} \cong^{\mathrm{mon}}_{\ell;w,\mathcal{Q}} \mathfrak{N}$.

0.9. Lause. *Olkoon $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \in \mathrm{Str}(\sigma)$, $k \leq \omega$, $w\colon \mathcal{Q} \cup \{\exists\} \to \mathbb{N}$ ja $\mathcal{Q}$ joukko monotonisia kvanttoreita. Oletetaan, että $\mathfrak{M} \cong^{\mathrm{mon}}_{k;w,\mathcal{Q}} \mathfrak{N}$. Tällöin $\mathfrak{M} \equiv_{k;w} \mathfrak{N}\,(\mathsf{FO}(\mathcal{Q}))$.* $\square$

0.10. Lause. *Olkoon τ äärellinen aakkosto, joka ei sisällä funktiosymboleita, ja $\mathcal{Q}$ äärellinen joukko monotonisia Lindströmin kvanttoreita. Olkoon $k \leq \omega$ ja $w\colon \mathcal{Q} \cup \{\exists\} \to \mathbb{N}^*$ sekä $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathrm{Str}(\tau)$. Oletetaan, että $\mathfrak{M} \equiv_{k;w} \mathfrak{N}\,(\mathsf{FO}(\mathcal{Q}))$. Tällöin $\mathfrak{M} \cong^{\mathrm{mon}}_{k;w,\mathcal{Q}} \mathfrak{N}$.* $\square$

0.11. Lemma. *Olkoot $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathrm{Str}(\tau)$, $p \in \mathrm{Part}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, $I \subset \mathrm{Part}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ ja $n \in \mathbb{N}^*$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

a) p $\exists^{(n)}$-laajentuu monotonisesti puolin ja toisin joukkoon I.
b) Jokaista $\bar{a} \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{M})^n$ vastaa sellainen $q \in I$, että $q \supset p$ ja $\mathrm{rg}(\bar{a}) \subset \mathrm{dom}(q)$, ja jokaista $\bar{b} \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{N})^n$ sellainen $r \in I$, että $r \supset p$ ja $\mathrm{rg}(\bar{b}) \subset \mathrm{rg}(r)$ (eli tapauksessa $n = 1$ p laajentuu puolin ja toisin joukkoon I. $\square$

0.12. Lemma. *Olkoon $\mathcal{Q}$ joukko kvanttoreita ja $F\colon \mathrm{Str}(\tau) \to \mathrm{Str}(\sigma)$, missä σ on relationaalinen, kaavojen $(\psi_R)_{R \in \sigma}$ määräämä tiukasti $\mathsf{FO}(\mathcal{Q})$-eksplisiittinen operaatio. Olkoon $w\colon \mathcal{Q} \cup \{\exists\} \to \mathbb{N}$. Tällöin jokaista $\varphi \in \mathsf{FO}(\mathcal{Q})[\tau]$ vastaa sellainen $\varphi^* \in \mathsf{FO}(\mathcal{Q})[\tau]$, että*

a) jokaisella $\mathfrak{A} \in \mathrm{Str}(\tau)$ pätee $F(\mathfrak{A}) \models \varphi \iff \mathfrak{A} \models \varphi^*$
ja
b) $\mathrm{qr}_w(\varphi^*) \leq \sup\{\, \mathrm{qr}_w(\psi_r) \mid r \in \sigma \,\} + \mathrm{qr}_w(\varphi)$. $\square$

0.13. Lemma. *Olkoon $\mathcal{Q}$ joukko kvanttoreita ja $w\colon \mathcal{Q} \cup \{\exists\} \to \mathbb{N}$. Oletetaan, että osajoukon $\mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{Q}$ kvanttoreista jokainen $\mathsf{Q} \in \mathcal{Q}_1$ on määriteltävissä lauseella $\chi_{\mathsf{Q}} \in \mathsf{FO}(\mathcal{Q}_0)[\tau_{\mathsf{Q}}]$, missä $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}_1$ ja $\mathrm{qr}_w(\mathcal{X}_{\mathsf{Q}}) \le w(\mathsf{Q})$. Tällöin jokaista $\varphi \in \mathsf{FO}(\mathcal{Q})[\tau]$ vastaa sellainen $\varphi^* \in \mathsf{FO}(\mathcal{Q}_0)[\tau]$, että $\models \varphi \leftrightarrow \varphi^*$ ja $\mathrm{qr}_w(\varphi^*) \le \mathrm{qr}_w(\varphi)$.* $\square$

0.14. Lause. *Olkoon $\widetilde{\mathsf{Q}}$ Lindströmin kvanttorin Q monotonisointi. Tällöin $\widetilde{\mathsf{Q}}$ on monotoninen ja $\mathsf{FO}(\mathsf{Q}) \equiv \mathsf{FO}(\widetilde{\mathsf{Q}})$. Itse asiassa jos $w\colon \{\mathsf{Q}, \widetilde{\mathsf{Q}}, \exists\} \to \mathbb{N}$ on painofunktio, niin Q on määriteltävissä $\mathsf{FO}(\widetilde{\mathsf{Q}})$:n lauseella, jonka kvanttoriaste on $w(\widetilde{\mathsf{Q}})$, ja $\widetilde{\mathsf{Q}}$ on $\mathsf{FO}(\mathsf{Q})$:ssa lauseella, jonka kvanttoriaste on $\max\{w(\mathsf{Q}), \mathrm{ar}(\mathsf{Q}) \cdot w(\exists)\}$.* $\square$

0.15. Määritelmä. Olkoot $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathrm{Str}(\tau)$ ja Q aakkoston τ kvanttori. Osittaisen isomorfismin $p \in \mathrm{Part}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ sanotaan Q-*laajentuvan puolin ja toisin joukkoon* $I \subset \mathrm{Part}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

a) Kun $\mathfrak{A} \in K_{\mathsf{Q}}$, $\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{M})$, niin ainakin toinen seuraavista toteutuu:
   1) On olemassa sellainen $\mathfrak{B} \in K_{\mathsf{Q}}$, että $\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{N})$ ja kaikilla $R \in \tau$ ja $\bar{b} \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{B})^{\#(R)}$ on olemassa sellainen $q \in I$, että $q \supset p$, $\mathrm{rg}(\bar{b}) \subset \mathrm{rg}(q)$ ja $q^{-1} \circ \bar{b} \in R^{\mathfrak{A}} \iff \bar{b} \in R^{\mathfrak{B}}$.
   2) Jollakin $R \in \tau$ ja $\bar{b} \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})^{\#(R)}$ on olemassa sellaiset p:n laajennukset $q, q' \in I$, että $q^{-1} \circ \bar{b} \in R^{\mathfrak{A}}$ ja ${q'}^{-1} \circ \bar{b} \notin R^{\mathfrak{A}}$.

b) Vastaava ehto malleille $\mathfrak{B} \in K_{\mathsf{Q}}$, $\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{N})$.

0.16. Lemma. *Olkoot $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathrm{Str}(\varrho)$, Q yeistetty kvanttori ja $\widetilde{\mathsf{Q}}$ kvanttorin Q monotonisointi. Olkoot $p \in \mathrm{Part}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ ja $I \subset \mathrm{Part}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Oletetaan, että $n = \mathrm{ar}(\mathsf{Q}) \in \omega$. Tällöin*

a) Jos p $\widetilde{\mathsf{Q}}$-laajentuu monotonisesti puolin ja toisin joukkoon I, niin se Q-laajentuu puolin ja toisin joukkoon I.

b) Jos p $\exists^{(n)}$-laajentuu monotonisesti puolin ja toisin joukkoon I ja Q-laajentuu puolin ja toisin joukkoon I, niin se $\widetilde{\mathsf{Q}}$-laajentuu monotonisesti puolin ja toisin joukkoon I.
$\square$

0.17. Määritelmä. Olkoot $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \in \mathrm{Str}(\tau)$, κ ordinaali, $\mathcal{Q}$ joukko yleistettyjä kvanttoreita ja $w\colon \mathcal{Q} \cup \{\exists\} \to \mathbb{N}$. Jono $(I_i)_{i \in 1+\kappa}$ on mallien $\mathfrak{M}$ ja $\mathfrak{N}$ välinen *osittaisten isomorfismien $w, \mathcal{Q}$-systeemi*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

0) Jokaisella $i \in 1 + \kappa$ pätee $\emptyset \neq I_i \subset \mathrm{Part}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$;
1) jono $(I_i)_{i \in 1+\kappa}$ on laskeva;
2) kun $i, j \in 1 + \kappa$, $\mathsf{Q} \in \mathcal{Q} \cup \{\exists\}$ ja $j = i + w(\mathsf{Q})$, niin
   a) jos $\mathsf{Q} \neq \exists$, niin jokainen $p \in I_j$ Q-laajentuu puolin ja toisin joukkoon I_i,
   b) jos $\mathsf{Q} = \exists$, niin jokainen $p \in I_i$ laajentuu puolin ja toisin joukkoon I_i.

Tätä merkitään $(I_i)_{i \in 1+\kappa}\colon \mathfrak{M} \cong_{\kappa; w, \mathcal{Q}} \mathfrak{N}$ tai lyhyesti (jono unohtaen) $\mathfrak{M} \cong_{\kappa; w, \mathcal{Q}} \mathfrak{N}$.

0.18. Lause. *Olkoon $\mathcal{Q}$ äärellinen joukko Lindströmin kvanttoreita ja $w\colon \mathcal{Q} \cup \{\exists\} \to \mathbb{N}^*$. Olkoon τ äärellinen aakkosto, joka ei sisällä funktiosymboleita. Olkoot $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \in \mathrm{Str}(\tau)$ ja $k \le \omega$. Oletetaan, että $w(\exists) = 1$ ja jokaisella $\mathsf{Q} \in \mathcal{Q}$ $w(\mathsf{Q}) \ge \mathrm{ar}(\mathsf{Q})$. Olkoon jokaisella $\mathsf{Q} \in \mathcal{Q}$ kvanttori $\widetilde{\mathsf{Q}}$ kvanttorin Q montonisointi ja merkitään $\widetilde{\mathcal{Q}} = \{\, \widetilde{\mathsf{Q}} \mid$*

$\mathsf{Q} \in \mathcal{Q}\}$, $\widetilde{w}\colon \widetilde{\mathcal{Q}} \cup \{\exists\} \to \mathbb{N}^*$, $\widetilde{w}(\exists) = 1$, $\widetilde{w}(\widetilde{\mathcal{Q}}) = w(\mathsf{Q})$. *Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

a) $\mathfrak{M} \equiv_{k;w} \mathfrak{N}\,(\mathsf{FO}(\mathcal{Q}))$,
b) $\mathfrak{M} \equiv_{k;\widetilde{w}} \mathfrak{N}\,(\mathsf{FO}(\widetilde{\mathcal{Q}}))$,
c) $\mathfrak{M} \cong_{k;\widetilde{w},\widetilde{\mathcal{Q}}} \mathfrak{N}$,
d) $\mathfrak{M} \cong^*_{k;w,\mathcal{Q}} \mathfrak{N}$. $\square$