

Tampereen yliopisto
Renkaat ja kunnat
Harjoitus 1 (24. 8.)
Syksy 2020

1. Ratkaise kompleksilukujen kunnassa yhtälöt

a) $z^3 - 21z^2 - 46z + 2016 = 0$ ja

b) $z^4 + 5z^2 + 6 = 0$.

2. Olkoon $a \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että polynomille $x^n - a^n \in \mathbb{C}[x]$ saadaan tekijähajotelma

$$x^n - a^n = \prod_{k=0}^{n-1} (x - \epsilon^k a) = (x - a)(x - \epsilon a) \cdots (x - \epsilon^{n-1} a),$$

missä $\epsilon = e^{2\pi i/n}$.

3. Olkoot $u, v \in \mathbb{C}$. Todista, että on olemassa sellaiset $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, että

$$\begin{cases} \alpha + \beta = u \\ \alpha \cdot \beta = v \end{cases}$$

ja että pari $\{\alpha, \beta\}$ on yksikäsitteinen.

4. Ratkaise toisen asteen yhtälö

$$x^2 - 8x + 5 = 0$$

renkaassa $\mathbf{K} = (\mathbb{Z}/89\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Onko \mathbf{K} kunta?

5. Esitä esimerkki renkaasta \mathbf{R} ja toisen asteen \mathbf{R} -kertoimisesta yhtälöstä, jolla on vähintään kolme ratkaisua renkaassa \mathbf{R} .

6. Oletetaan, että $\cos 3\vartheta = r$. Osoita, että kompleksisen yhtälön

$$4z^3 - 3z - r = 0$$

ratkaisut ovat $z = \cos \vartheta$, $z = \cos(\vartheta + 2\pi/3)$ ja $z = \cos(\vartheta + 4\pi/3)$.