Affiinit kannat

Määr. Olkoon V K-vektoriavaruus, missä $\mathrm{char}(K,+,\cdot) \neq 2$. Olkoon A V:n affiini aliavaruus. Tällöin $S \subseteq A$ *virittää affiinisti* A:n, jos jokainen $a \in A$ voidaan esittää affiinina kombinaationa S:n alkioista, ts. on olemassa äärellinen $S_0 \subseteq S$ ja $\lambda_s \in K$ ($s \in S_0$), joille
$$a = \sum_{s \in S_0} \lambda_s s \quad \text{ja} \quad \sum_{s \in S_0} \lambda_s = 1.$$

Merkintä: Kun V on kuten edellä ja $S \subseteq V$, niin merkitään

$$\mathrm{Aff}(S)\text{:llä}$$

kaikkien S:n affiinien kombinaatioiden joukkoa.

Edellisen määritelmän mukaan

$$S \text{ virittää affiinisti } A\text{:n} \iff A = \mathrm{Aff}(S).$$

Lause. Olkoon V K-vektoriavaruus, missä $\mathrm{char}(K,+,\cdot) \neq 2$, ja $S \subseteq V$. Tällöin $\mathrm{Aff}(S)$ on V:n affiini aliavaruus.

Tod. HT $\square$

Lause. Olkoon V K-vektoriavaruus, missä $\mathrm{char}(K,+,\cdot) \neq 2$, A sen affiini aliavaruus, U A:n suunta-avaruus ja $S \subseteq A$.
Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:

a) S virittää A:n affiinisti,

b) Kaikilla $s \in S$ pätee $S - s = \{s' - s \mid s' \in S\}$ virittää U:n.

c) On olemassa $s \in S$, jolle $S - s$ virittää U:n.

Tod. Triviaalisti: b) $\Rightarrow$ c).

a) $\Rightarrow$ b): Olkoon $s \in S$.

Oletetaan, että S virittää A:n affiinisti. Huomataan, että

$$S - s \subseteq \{x - y \mid x, y \in A\} = U.$$

Olkoon $u \in U$, jolloin $s + u \in A$ $(s + U = A)$.

Oletuksen nojalla

$$s + u = \sum_{s' \in S_0} \lambda_{s'} s', \text{ missä } S_0 \subseteq S \text{ on äärellinen ja } \sum_{s' \in S_0} \lambda_{s'} = 1.$$

Voidaan olettaa, että $s \in S_0$.

Saadaan

$$\sum_{s' \in S_0} \lambda_{s'} s' = s + u = 1 \cdot s + u = \sum_{s' \in S_0} \lambda_{s'} \cdot s + u$$

$$\Rightarrow \sum_{s' \in S_0} \lambda_{s'} (s' - s) = u.$$

Siis $S - s$ virittää U:n.

c) $\Rightarrow$ a): Valitaan $s \in S$, jolle $S - s$ virittää U:n.

Olkoon $a \in A$. Tiedetään, että $A = s + U$

Siis jollakin $u \in U$ pätee $a = s + u$.

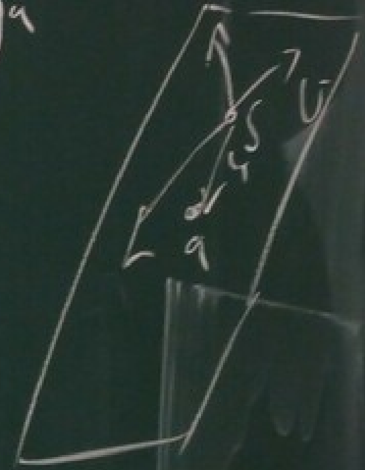
Koska $S - s$ virittää U:n, niin jollakin äärellisellä $S_0 \subseteq S$, missä $s \notin S_0$, ja jollakin kertoimilla $\mu_{s'}$, $s' \in S_0$, pätee

$$u = \sum_{s' \in S_0} \mu_{s'} (s' - s)$$

Siis

$$a = s + u = s + \sum_{s' \in S_0} \mu_{s'} (s' - s)$$

$$= \Big(1 - \sum \mu_{s'}\Big) s + \sum_{s' \in S_0} \mu_{s'} s' \in \mathrm{Aff}(S),$$



sillä kertoimien summa on

$$\Big(1-\sum_{s'\in S_0}\mu_{s'}\Big)+\sum_{s'\in S_0}\mu_{s'}=1.$$

Siten $\mathrm{Aff}(S)=A$ eli:
S virittää A:n. $\square$

<u>Määritelmä</u>. Olkoon V K-vektoriavaruus, missä $\mathrm{char}(K,+,\cdot)\neq 2$. Joukko I on <u>affiinisti riippumaton</u>, jos mikään $x\in I$ ei ole affiini kombinaatio toisista I:n alkioista, ts. $x\notin \mathrm{Aff}(I\setminus\{x\})$.

<u>Lause</u>. Olkoot V K-vektoriavaruus, missä $\mathrm{char}(K,+,\cdot)$, ja $I\subseteq V$, $I\neq\emptyset$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:

a) I on affiinisti riippumaton.

b) Jokaisella $x\in I$ joukko
$$(I\setminus\{x\})-x = \{y-x \mid y\in I,\ y\neq x\}$$
on vapaa.

c) Jollakin $x\in I$ joukko
$$\{y-x \mid y\in I,\ y\neq x\}$$ on vapaa.

Tod. HT $\square$

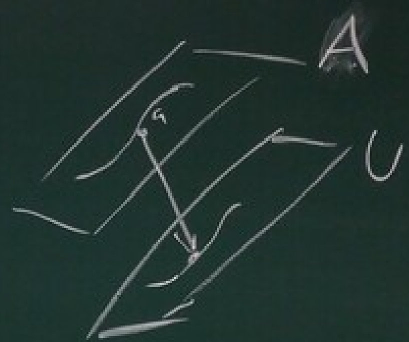
Määritelmä. Olkoon V K-vektoriavaruus $(\mathrm{char}(K,+,\cdot)\neq 2)$, A sen affiini aliavaruus ja $E \subseteq A$. Tällöin E on A:n **affiini kanta**, jos E on A:n affiini virittäjistö ja E on affiinisti riippumaton.

Lause. Olkoon V K-vektoriavaruus ($\mathrm{char}(K,+,\cdot) \neq 2$) ja A V:n affiini aliavaruus. Olkoon $E \subseteq A$, $E \neq \emptyset$. Merkitään A:n suunta-avaruutta U:llä. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:

a) E on A:n affiini kanta.

b) Jokaisella $a \in E$ joukko $\{x-a \mid x \in E \setminus \{a\}\}$ on U:n kanta.

c) On olemassa $a \in E$, jolle joukko $\{x-a \mid x \in E \setminus \{a\}\}$ on U:n kanta.



Tod. b) $\Rightarrow$ c) pätee, sillä $E \neq \emptyset$.

c) $\Rightarrow$ a): Kiinnitetään sellainen $a \in E$, että $E_U = \{x-a \mid x \in E \setminus \{a\}\}$ on U:n kanta. Tällöin E_U on vapaa, joten E on affiinisti riippumaton.

Lisäksi E_U on U:n virittäjistö, joten E virittää A:n affiinisti.

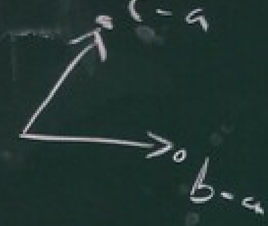
Koska E on affiinisti riippumaton ja virittää A:n affiinisti, niin E on A:n affiini kanta.

a) $\Rightarrow$ b) : Oletetaan, että E on A:n affiini kanta, jolloin E on sekä affiinisti riippumaton että A:n affiini virittäjistö. Olkoon $a \in E$ ja $E_U = \{x - a \mid x \in E \setminus \{a\}\}$. Aiempien lauseiden nojalla E_U on vapaa ja U:n virittäjistö. Siis E_U on U:n kanta. $\square$

Esim. $\mathbb{R}^2$

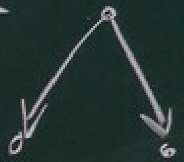
E

$(E-a)\setminus\{\bar{0}\} = E_a$



E_b

E_c



Lause. Olkoon V K-vektoriavaruus ($\mathrm{char}(K,+,\cdot)\neq 2$) ja A V:n affiini aliavaruus. Tällöin A:lla on affiini kanta ja jokaisessa A:n affiinissa kannassa on $\dim(A)+1$ alkiota.

Tod. Merkitään A:n suunta-avaruutta U:lla. Lineaarialgebrasta tiedetään, että U:lla on kanta E_U. Kiinnitetään jokin $a\in A$. Asetetaan

$$E_U = (a+E_U)\cup\{a\}.$$

...nomataan, että

$$\{x-a \mid x \in E \setminus \{a\}\}$$
$$= \{x-a \mid x \in a + E_U\}$$
$$= (-a) + (a + E_U) = E_U.$$

...s E on A:n affiini kanta.

Olkoon nyt A:n aff. kanta E mielivaltainen.

...lloin edellisen lauseen nojalla

$$E_U = \{x-a \mid x \in E \setminus \{a\}\}$$

...n U:n kanta, missä $a \in E$ on kiinnitetty.

Saadaan

$$|E| = |E_U| + 1$$
$$= \dim(U) + 1 = \dim(A) + 1.$$

(E_U on U:n kanta)

$\square$

Abstrakti affiini avaruus

<u>[M]ääritelmä</u>. Kolmikko (A, V, δ) [o]n <u>affiini avaruus</u>, jos seuraavat ehdot pätevät:

1) $A \neq \emptyset$
2) V on vektoriavaruus.
3) V <u>toimii</u> joukossa A <u>toiminnon</u> $\delta : V \times A \to A$ kautta <u>uskollisesti</u> ja <u>transitiivisesti</u>:

Kaikilla $a \in A$ ja $u, v \in V$

a) $\delta(\overline{0}, a) = a$

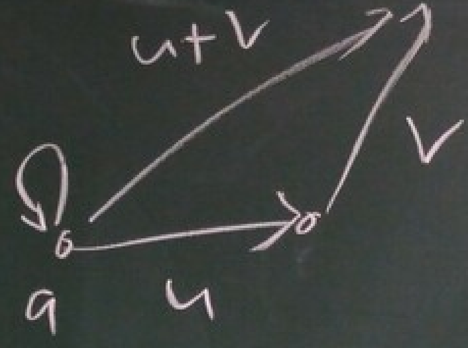
ja

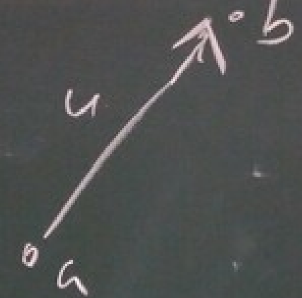
b) $\delta(u, (\delta(v, a))) = \delta(u+v, a)$.

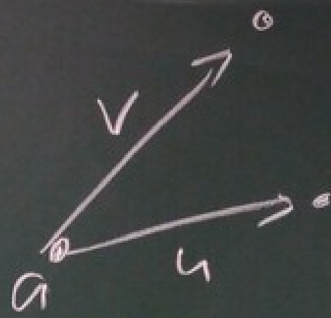
(δ on <u>toiminto</u>).

Toiminto δ on <u>transitiivinen</u>: Kaikilla $a, b \in A$ on olemassa $u \in V$, jolle $\delta(u, a) = b$.

Toiminto on lisäksi <u>uskollinen</u>: kaikilla $a \in A$, $u, v \in V$, $u \neq v$ pätee $\delta(u, a) \neq \delta(u, v)$.







<u>Esim.</u> Olkoon A K-vektoriavaruuden V affiini aliavaruus $(\mathrm{char}(K,+,\cdot)\neq 2)$.
Tästä voi tehdä affiini avaruuden (A, U, ζ), missä U on A:n suunta-avaruus ja $\zeta: U\times A \to A$, $\zeta(u,a)=u+a$. Kaikilla $a,b\in A$ ja $u,v\in V$ pätee nimittäin:

a) $\zeta(\bar{0},a)=\bar{0}+a=a$.

b) $\zeta(u,\zeta(v,a)) = u+(v+a)=(u+v)+a=\zeta(u+v,a)$.

Merkitään $w = b - a \in U$. Tällöin

$$\delta(w, a) = (b-a) + a = b.$$

Jos $u \neq v$, niin

$$\delta(u, a) = u + a \neq v + a = \delta(v, a).$$

Esim. Tarkastellaan $\mathbb{R}^3$:n osajoukkoa

$$A = \{(x, y, \sin(x+y)) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Asetetaan $\delta : \mathbb{R}^2 \times A \to A$,

$$\delta((s,t), (x, y, \sin(x+y)))$$

$$= (s+x, t+y, \sin((x+s)+(y+t))).$$

Tällöin $(A, \mathbb{R}^2, \delta)$ on affiini avaruus.