Geometria

Kerkko Luosto

Kevät 2021

Lineaarialgebran pikakertaus

Vektoriavaruus

Määritelmä

Epätyhjästä joukosta V muodostuu *reaalinen vektoriavaruus*, kun se varustetaan *vektorisummalla* $+ \colon V \times V \to V$ ja *skalaarikerronnalla* $\cdot \colon \mathbb{R} \times V \to V$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

Vektoriavaruus

Määritelmä

Epätyhjästä joukosta V muodostuu *reaalinen vektoriavaruus*, kun se varustetaan *vektorisummalla* $+\colon V \times V \to V$ ja *skalaarikerronnalla* $\cdot\colon \mathbb{R} \times V \to V$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

a. $(V, +)$ on Abelin ryhmä eli $+$ on sekä liitännäinen että vaihdannainen laskutoimitus, $+$:lla on neutraalialkio $\mathbf{0}$ (*nollavektori*) ja jokaisella $x \in V$ on *vastavektori* $-x \in V$.

Vektoriavaruus

Määritelmä

Epätyhjästä joukosta V muodostuu *reaalinen vektoriavaruus*, kun se varustetaan *vektorisummalla* $+: V \times V \to V$ ja *skalaarikerronnalla* $\cdot: \mathbb{R} \times V \to V$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

a. $(V, +)$ on Abelin ryhmä eli $+$ on sekä liitännäinen että vaihdannainen laskutoimitus, $+$:lla on neutraalialkio $\mathbf{0}$ (*nollavektori*) ja jokaisella $x \in V$ on *vastavektori* $-x \in V$.
b. Skalaarikerronta toteuttaa seuraavat ehdot: kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ ja $x, y \in V$ pätee
    1. $a(bx) = (ab)x$
    2. $(a + b)x = ax + bx$
    3. $a(x + y) = ax + ay$
    4. $1 \cdot x = x$

Aliavaruudet

Aliavaruuskriteeri: U on vektoriavaruuden V aliavaruus, jos ja vain jos $\emptyset \neq U \subset V$ ja

1. kaikilla $x, y \in U$ pätee $x + y \in U$ (vektorisumman suhteen suljettu)
2. kaikilla $a \in \mathbb{R}$ ja $x \in U$ pätee $ax \in U$ (skaalauksen suhteen suljettu)

Aliavaruudet

Aliavaruuskriteeri: U on vektoriavaruuden V aliavaruus, jos ja vain jos $\emptyset \neq U \subset V$ ja

1. kaikilla $x, y \in U$ pätee $x + y \in U$ (vektorisumman suhteen suljettu)
2. kaikilla $a \in \mathbb{R}$ ja $x \in U$ pätee $ax \in U$ (skaalauksen suhteen suljettu)

Fakta

$\mathbb{R}^3$:n vektorialiavaruudet ovat

0. $\{\mathbf{0}\}$,
1. *origon kautta kulkevat $\mathbb{R}^3$:n suorat,*
2. *origon kautta kulkevat $\mathbb{R}^3$:n tasot,*
3. $\mathbb{R}^3$.

Lineaarikuvaukset

Määritelmä

Kuvaus $A\colon U \to V$ reaalisesta vektoriavaruudesta U reaaliseen vektoriavaruuteen V on *lineaarikuvaus*, jos kaikilla $x, y \in U$ ja $c \in \mathbb{R}$ pätee

1. $A(x + y) = A(x) + A(y)$ ja
2. $A(cx) = cA(x)$.

Lineaarikuvaukset

Määritelmä

Kuvaus $A\colon U \to V$ reaalisesta vektoriavaruudesta U reaaliseen vektoriavaruuteen V on *lineaarikuvaus*, jos kaikilla $x, y \in U$ ja $c \in \mathbb{R}$ pätee

1. $A(x + y) = A(x) + A(y)$ ja
2. $A(cx) = cA(x)$.

Palutettakoon mieleen, että kun $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ on lineaarikuvaus, U euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^m$ aliavaruus ja V euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus, niin

Lineaarikuvaukset

Määritelmä

Kuvaus $A\colon U \to V$ reaalisesta vektoriavaruudesta U reaaliseen vektoriavaruuteen V on *lineaarikuvaus*, jos kaikilla $x, y \in U$ ja $c \in \mathbb{R}$ pätee

1. $A(x+y) = A(x) + A(y)$ ja
2. $A(cx) = cA(x)$.

Palutettakoon mieleen, että kun $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ on lineaarikuvaus, U euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^m$ aliavaruus ja V euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus, niin

- $A[U]$ on $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus ja
- $A^{-1}[V]$ on $\mathbb{R}^m$n aliavaruus

eli lineaarikuvauksissa aliavaruuksien kuvat ja alkukuvat ovat myös aliavaruuksia.

Aliavaruuden parametriesitys

Parametriesitys perustuu edellä esitettyyn faktaan, että kun $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ on lineaarikuvaus, niin $W = \mathrm{Im}(A) = A[\mathbb{R}^m]$ on $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus. Vektoria $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ voidaan siis ajatella parametreina, joiden avulla voidaan viitata aliavaruuden A vektoriin $A\mathbf{x}$.

Esimerkki

Kun matriisit ja lineearikuvaukset samastetaan, niin

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$$

on lineaarikuvaus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja

$$W = \operatorname{Im}(A) = A[\mathbb{R}^2] = \{\, A(t,u) \mid (t,u) \in \mathbb{R}^2 \,\} = \{\, (3t + 2u, u, -7t + 6u) \mid (t,u) \in \mathbb{R}^2 \,\}.$$

W on siis niiden pisteiden (x, y, z) joukko, jotka ovat joillakin $t, u \in \mathbb{R}$ muotoa

$$\begin{cases} x = 3t + 2u \\ y = u, \\ z = -7t + 6u. \end{cases}$$

Aliavaruuden yhtälöesitys

Kun $B\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ on lineaarikuvaus, niin lineaarikuvauksen *ydin* $W = \operatorname{Ker}(B) = B^{-1}[\{\mathbf{0}\}]$ on $\mathbb{R}^m$:n vektorialiavaruus.

Esimerkki

Tarkastellaan kuvausta

$$B = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 17 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2.$$

Sen ydin on

$$\begin{aligned} W &= \mathrm{Ker}(A) = B^{-1}[\{\mathbf{0}\}] = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid B(x,y,z) = \mathbf{0} = (0,0) \,\} \\ &= \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (12x + y + 17z, -3x + y + 2z) = (0,0) \,\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 12x + y + 17z = 0 \\ -3x + y + 2z = 0 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

Esimerkki

Tarkastellaan kuvausta

$$B = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 17 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2.$$

Sen ydin on

$$\begin{aligned} W &= \mathrm{Ker}(A) = B^{-1}[\{\mathbf{0}\}] = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid B(x,y,z) = \mathbf{0} = (0,0) \,\} \\ &= \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (12x + y + 17z, -3x + y + 2z) = (0,0) \,\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 12x + y + 17z = 0 \\ -3x + y + 2z = 0 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

Epämuodollisemmin: W on suora, jonka määrää yhtälöpari

$$\begin{cases} 12x + y + 17z = 0 \\ -3x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Kanta

Määritelmä

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus.

a. Vektoriavaruuden V osajoukko S on V:n *virittäjistö*, jos jokainen $x \in V$ voidaan esittää muodossa

$$x = \sum_{s \in S_0} \lambda_s \cdot s,$$

missä $\lambda_s \in \mathbb{R}$, kun $s \in S_0$, ja $S_0 \subseteq S$ on äärellinen.

Kanta

Määritelmä

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus.

a. Vektoriavaruuden V osajoukko S on V:n *virittäjistö*, jos jokainen $x \in V$ voidaan esittää muodossa
$$x = \sum_{s \in S_0} \lambda_s \cdot s,$$
missä $\lambda_s \in \mathbb{R}$, kun $s \in S_0$, ja $S_0 \subseteq S$ on äärellinen.

b. Joukko $I \subseteq V$ on *vapaa*, jos se toteuttaa seuraavan vapausehdon: jos I:n vektoreista muodostetulle lineaarikombinaatiolle pätee $\sum_{x \in I_0} \lambda_x \cdot x = \mathbf{0}$, missä $I_0 \subseteq I$ on äärellinen, niin jokaisella $x \in I_0$ on voimassa $\lambda_x = 0$.

Kanta

Määritelmä

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus.

a. Vektoriavaruuden V osajoukko S on V:n *virittäjistö*, jos jokainen $x \in V$ voidaan esittää muodossa
$$x = \sum_{s \in S_0} \lambda_s \cdot s,$$
missä $\lambda_s \in \mathbb{R}$, kun $s \in S_0$, ja $S_0 \subseteq S$ on äärellinen.

b. Joukko $I \subseteq V$ on *vapaa*, jos se toteuttaa seuraavan vapausehdon: jos I:n vektoreista muodostetulle lineaarikombinaatiolle pätee $\sum_{x \in I_0} \lambda_x \cdot x = \mathbf{0}$, missä $I_0 \subseteq I$ on äärellinen, niin jokaisella $x \in I_0$ on voimassa $\lambda_x = 0$.

c. Joukko $K \subseteq V$ on V:n *kanta*, jos se on yhtäaikaisesti V:n virittäjistö ja vapaa V:ssä.

Dimensio

Lause (Kantalause)

Jokaisella reaalisella vektoriavaruudella on kanta. Minkä tahansa reaalisen vektoriavaruuden V *kaikki kannat ovat yhtämahtavia.*

Dimensio

Lause (Kantalause)

Jokaisella reaalisella vektoriavaruudella on kanta. Minkä tahansa reaalisen vektoriavaruuden V *kaikki kannat ovat yhtämahtavia.*

Kantalauseen nojalla seuraava määritelmä on mahdollinen.

Dimensio

Lause (Kantalause)

Jokaisella reaalisella vektoriavaruudella on kanta. Minkä tahansa reaalisen vektoriavaruuden V kaikki kannat ovat yhtämahtavia.

Kantalauseen nojalla seuraava määritelmä on mahdollinen.

Määritelmä

Reaalisen vektoriavaruuden V *dimensio* on

$$\dim(V) = |K|,$$

missä K on mikä tahansa vektoriavaruuden V kanta.

Affiinia geometriaa

Affiini aliavaruus

Määritelmä

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $A \subseteq V$. A on V:n *affiini aliavaruus*, jos $A \neq \emptyset$ ja A sisältää kaikkien pisteipariensa yhdyssuorat, ts. kaikilla $x, y \in A$, $x \neq y$ pätee

$$\ell(x, y) = \{\, tx + (1 - t)y \mid t \in \mathbb{R} \,\} \subseteq A.$$

Tässä esiintyvää joukkoa $\ell(x, y)$ kutsutaan pisteiden x ja y *kautta kulkevaksi suoraksi*.

Affiini aliavaruus

Määritelmä

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $A \subseteq V$. A on V:n *affiini aliavaruus*, jos $A \neq \emptyset$ ja A sisältää kaikkien pisteypariensa yhdyssuorat, ts. kaikilla $x, y \in A$, $x \neq y$ pätee

$$\ell(x, y) = \{ tx + (1-t)y \mid t \in \mathbb{R} \} \subseteq A.$$

Tässä esiintyvää joukkoa $\ell(x, y)$ kutsutaan pisteiden x ja y *kautta kulkevaksi suoraksi*.

Määritelmä

Olkoon V reaalinen aliavaruus ja $S \subseteq V$. Joukon S vektoreiden *affiinilla kombinaatiolla* tarkoitetaan mitä tahansa lineaarikombinaatioita

$$\sum_{s \in S_0} \lambda_s s, \text{ missä} S_0 \subseteq S \text{ on äärellinen ja } \sum_{s \in S_0} \lambda_s = 1.$$

Kuperuus

Määritelmä

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus.

a. Joukko $K \subseteq V$ on *kupera* V:n osajoukko, jos K sisältää kaikkien pistepariensa yhdysjanat, ts. kaikilla $x, y \in K$, $x \neq y$ pätee

$$[x, y] = \{\, tx + (1 - t)y \mid t \in [0, 1] \,\} \subseteq K\,.$$

Joukkoa $[x, y]$ kutsutaan *janaksi*, jonka *päätepisteet* ovat a ja b. (Merkintä on mielekäs myös tapauksessa $x = y$, jolloin $[x, x] = \{x\}$, mutta tätä *surkastunutta janaa* ei pidetä janana.)

b. Joukon $S \subseteq V$ vektoreiden *kuperalla kombinaatiolla* tarkoitetaan lineaarikombinaatioita $\sum_{s \in S_0} \lambda_s s$, missä $S_0 \subseteq S$ on äärellinen, $\sum_{s \in S_0} \lambda_s = 1$ ja jokaisella $s \in S_0$ pätee $\lambda_s \geq 0$.

Suunnikaslemma

Lemma (Suunnikaslemma)

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja A sen affiini aliavaruus. Olkoot $a, b, c \in A$ ja $d \in V$. Jos $a + c = b + d$, niin $d \in A$.

Suunnikaslemma

Lemma (Suunnikaslemma)

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja A sen affiini aliavaruus. Olkoot $a, b, c \in A$ ja $d \in V$. Jos $a + c = b + d$, niin $d \in A$.

Lemma

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja A sen affiini aliavaruus. Merkitään $U_0 = \{\, x - y \mid x, y \in A \,\}$. Olkoon $a \in A$ mielivaltainen. Tällöin $v \in U_0$, jos ja vain jos $a + v \in A$, kun $v \in V$.

Suunta-avaruudet

Lause

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $A \subseteq V$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:

a. *A on V:n affiini aliavaruus.*
b. *On olemassa $a \in A$ ja V:n vektorialiavaruus U, joille $A = a + U = \{ a + x \mid x \in U \}$.*

Itse asiassa kun A on affiini aliavaruus, niin U on yksikäsitteinen (jopa a:sta riippumaton) ja a:ksi voi valita minkä tahansa A:n pisteen.

Suunta-avaruudet

Lause

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $A \subseteq V$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:

- a) *A on V:n affiini aliavaruus.*
- b) *On olemassa $a \in A$ ja V:n vektorialiavaruus U, joille $A = a + U = \{ a + x \mid x \in U \}$.*

Itse asiassa kun A on affiini aliavaruus, niin U on yksikäsitteinen (jopa a:sta riippumaton) ja a:ksi voi valita minkä tahansa A:n pisteen.

Määritelmä

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus, A sen affiini aliavaruus ja U sen vektorialiavaruus. Jos $A = a + U$ jollakin $a \in U$, niin U:ta kutsutaan A:han *liittyväksi* tai A:ta *vastaavaksi vektorialiavaruudeksi* tai A:n *suunta-avaruudeksi*.

Affinin aliavaruuden dimensio

Määritelmä

Olkoon A reaalisen vektoriavaruuden V affiini aliavaruus. Tällöin A:n *dimensio* on $\dim A = \dim U$, missä U on A:n suunta-avaruus. Jos $\dim A = 1$, niin A on *suora*. Jos $\dim A = 2$, niin A on *taso*. Jos V on n-ulotteinen, missä $n \in \mathbb{Z}_+$, ja $\dim A = n - 1$, niin A:ta kutsutaan V:n *hypertasoksi*.

Affinin aliavaruuden dimensio

Määritelmä

Olkoon A reaalisen vektoriavaruuden V affiini aliavaruus. Tällöin A:n *dimensio* on $\dim A = \dim U$, missä U on A:n suunta-avaruus. Jos $\dim A = 1$, niin A on *suora*. Jos $\dim A = 2$, niin A on *taso*. Jos V on n-ulotteinen, missä $n \in \mathbb{Z}_+$, ja $\dim A = n - 1$, niin A:ta kutsutaan V:n *hypertasoksi*.

Lause

Olkoot A ja B euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ affiineja aliavaruuksia, joille $B \subsetneq A$. Tällöin $\dim B < \dim A$.

Affiinit aliavaruuksien leikkaukset

Esimerkki

Tarkastellaan $\mathbb{R}^4$:n tasoja

$$T = \{\, (x, y, 2, 3) \mid x, y \in \mathbb{R} \,\} = (0, 1, 2, 3) + T_0 \text{ ja}$$
$$U = \{\, (0, 1, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R} \,\} = (0, 1, 2, 3) + U_0.$$

Suunta-avaruudet ovat $T_0 = \{\, (x, y, 0, 0) \mid x, y \in \mathbb{R} \,\} = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle$ ja $U_0 = \{\, \{(0, 0, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \,\} = \langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$.
Huomataan, että $T \cap U = \{(0, 1, 2, 3)\}$, joten tasojen leikkaus voi olla yksiö. Tämä on ilmiö, johon ei ole totuttu, minkä selittää ilmeisesti se, että fyysinen avaruus on kolmiulotteinen.

Affiinit aliavaruuksien leikkaukset

Esimerkki

Tarkastellaan $\mathbb{R}^4$:n tasoja

$$T = \{\,(x, y, 2, 3) \mid x, y \in \mathbb{R}\,\} = (0, 1, 2, 3) + T_0 \text{ ja}$$
$$U = \{\,(0, 1, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\,\} = (0, 1, 2, 3) + U_0.$$

Suunta-avaruudet ovat $T_0 = \{\,(x, y, 0, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\,\} = \langle(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\rangle$ ja $U_0 = \{\,\{(0, 0, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}\,\} = \langle(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\rangle$.
Huomataan, että $T \cap U = \{(0, 1, 2, 3)\}$, joten tasojen leikkaus voi olla yksiö. Tämä on ilmiö, johon ei ole totuttu, minkä selittää ilmeisesti se, että fyysinen avaruus on kolmiulotteinen.

Lause

Olkoot A ja B euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ affiineja aliavaruuksia, jotka leikkaavat eli $A \cap B \neq \emptyset$. Tällöin $\dim(A \cap B) \geq \dim A + \dim B - n$.

Affiinit kuvaukset

Määritelmä

Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia ja A V:n affiini aliavaruus. Tällöin kuvaus $f: A \to W$ on *affiini kuvaus*, jos kaikilla $x, y \in A$ ja $t \in \mathbb{R}$ pätee

$$f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t))f(y).$$

Lemma

Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia, $A \subseteq V$ ja $f: A \to W$ affiini kuvaus. Olkoot $a, b, c, d \in A$ pisteitä, joille $a + c = b + d$. Tällöin $f(a) + f(c) = f(b) + f(d)$.

Lemma

Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia ja A affiini V:n aliavaruus. Olkoot $f, g\colon A \to W$ affiineja kuvauksia ja $t \in \mathbb{R}$. Tällöin

a. $f + g\colon A \to W, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$,
b. $h\colon A \to W, h(x) = b$ ja
c. $tf\colon A \to W, (tf)(x) = tf(x)$

ovat myös affiineja kuvauksia.

Lemma

Olkoot U, V ja W reaalisia vektoriavaruuksia ja $f\colon A \to V, g\colon B \to W$ affiineja kuvauksia, missä A on U:n affiini aliavaruus ja B on V:n affiini aliavaruus. Oletetaan, että $f[A] \subseteq B$. Tällöin $g \circ f$ on affiini kuvaus $A \to W$.

Affiinit kuvaukset ja lineaarikuvaukset

Lause

Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia ja $L\colon V \to W$. Tällöin L on lineaarikuvaus, jos ja vain jos L on affiini kuvaus ja $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Lemma

Olkoon $f : A \to W$ affiini kuvaus, missä A on reaalisen vektoriavaruuden V affiini aliavaruus. Merkitään U:lla A:ta vastaavaa vektorialiavaruutta, ja olkoon $a \in A$. Tällöin $L\colon U \to W$, $L(x) = f(a + x) - f(a)$ on lineaarikuvaus.

Lause

Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia ja A V:n affiini aliavaruus. Olkoon $f: A \to W$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:

- a) *f on affiini kuvaus.*
- b) *On olemassa lineaarikuvaus $L: V \to W$ ja vakiovektori $b \in W$, joille $f(x) = L(x) + b$, kun $x \in A$.*

Seuraus

Edellisen lauseen merkinnöillä: Affiini kuvaus $f: A \to W$ voidaan laajentaa affiiniksi kuvaukseksi $\tilde{f}: V \to W$.

Affiinien aliavaruuksien säilyminen

Lause

Affiinit kuvaukset säilyttävät affiinit aliavaruudet: Olkoot V ja W reaalisia vektorialiavaruuksia, A V:n affiini aliavaruus ja $f : A \to W$ affiini kuvaus. Tällöin $f[A]$ on W:n affiini aliavaruus.

Affiinien aliavaruuksien säilyminen

Lause

Affiinit kuvaukset säilyttävät affiinit aliavaruudet: Olkoot V ja W reaalisia vektorialiavaruuksia, A V:n affiini aliavaruus ja $f\colon A \to W$ affiini kuvaus. Tällöin $f[A]$ on W:n affiini aliavaruus.

Määritelmä

Affiini kuvaus $f\colon A \to W$ on A:n ja $B = f[A]$:n välinen *affiini isomorfismi*, jos f on kuvauksena $f\colon A \to B$ bijektio (mihin riittää, että f on injektio). Tällöin sanotaan, että A ja B ovat *affiinisti isomorfiset*.

Affiinien aliavaruuksien säilyminen

Lause

Affiinit kuvaukset säilyttävät affiinit aliavaruudet: Olkoot V ja W reaalisia vektorialiavaruuksia, A V:n affiini aliavaruus ja $f : A \to W$ affiini kuvaus. Tällöin $f[A]$ on W:n affiini aliavaruus.

Määritelmä

Affiini kuvaus $f : A \to W$ on A:n ja $B = f[A]$:n välinen *affiini isomorfismi*, jos f on kuvauksena $f : A \to B$ bijektio (mihin riittää, että f on injektio). Tällöin sanotaan, että A ja B ovat *affiinisti isomorfiset*.

Lause

Olkoon A reaalisen vektoriavaruuden V ja B reaalisen vektoriavaruuden W affiini aliavaruus. Tällöin A ja B ovat affiinisti isomorfiset, jos ja vain jos $\dim A = \dim B$.

Yhdensuuntaisuus ja välissäolo

Määritelmä

Olkoot A ja B reaalisen vektoriavaruuden V affiineja aliavaruuksia. Affiinien aliavaruuksien A ja B sanotaan olevan *yhdensuuntaisia*, $A \parallel B$, jos niillä on sama suunta-avaruus.

Määritelmä

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Tällöin *piste $b \in V$ on pisteiden $a \in V$ ja $c \in V$ välissä*, jos on olemassa sellainen $t \in [0, 1]$, että $b = ta + (1 - t)c$ (yhtäpitävästi $b \in [a, c]$). Tätä merkitään $B(a, b, c)$.

Välissäolon säilyminen

Määritelmä

Olkoon A V:n affiini aliavaruus, W reaalinen vektoriavaruus ja $f\colon A \to W$. Sanotaan, että f *säilyttää välissäolorelaation*, jos kaikilla $a, b, c \in A$ ehdosta $B(a, b, c)$ seuraa $B(f(a), f(b), f(c))$. Kuvaus f *säilyttää välissäolorelaation vahvasti*, jos kaikilla $a, b, c \in A$ pätee

$$B(a, b, c) \Leftrightarrow B(f(a), f(b), f(c)).$$

Esimerkki

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ säilyttää välissäolorelaation vahvasti, jos ja vain jos se on aidosti monotoninen.

Havainto: a, b, c ovat samalla suoralla, jos ja vain jos $B(a, b, c)$, $B(b, c, a)$ tai $B(c, a, b)$.

Lemma

Olkoon A V:n affiini aliavaruus ja $a, b, c, d \in A$ eri pisteitä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla.

a. *Jos $\ell(a, c) \cap \ell(b, d) \neq \emptyset$, niin a, b, c ja d ovat samassa tasossa.*
b. $a + c = b + d \Leftrightarrow \ell(a, b) \parallel \ell(c, d) \wedge \ell(b, c) \parallel \ell(a, d)$.

Lemma

Olkoon A V:n affiini aliavaruus ja $a, b, c, d \in A$ eri pisteitä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla.

(a) *Jos $\ell(a, c) \cap \ell(b, d) \neq \emptyset$, niin a, b, c ja d ovat samassa tasossa.*

(b) $a + c = b + d \Leftrightarrow \ell(a, b) \parallel \ell(c, d) \wedge \ell(b, c) \parallel \ell(a, d)$.

Lemma

Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia ja A V:n affiini aliavaruus sekä $f[A]$ W:n affiini aliavaruus. Olkoon $f : A \to W$ välissäolon vahvasti säilyttävä kuvaus ja $a, c \in A$. Oletetaan, että $\dim A \geq 2$. Tällöin

$$f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c\right) = \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(c).$$

Välissäolon säilymisen karakterisointi

Lemma

Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia sekä A V:n affiini aliavaruus. Olkoon $f: A \to W$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

a. *f on affiini kuvaus.*
b. *f säilyttää välissäolon ja kaikilla $a, c \in A$ pätee*

$$f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c\right) = \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(c).$$

Lause

Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia ja $A \subseteq V$. Olkoon $f : A \to W$. Oletetaan, että A on V:n ja $f[A]$ W:n affiini aliavaruus ja lisäksi $\dim A \geq 2$. *Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

a. *f on affiini injektio.*
b. *f säilyttää vahvasti välissäolon.*

Sisätuloavaruudet

Metriikka

Määritelmä

Pari (X, d), missä $d\colon X \times X \to [0, \infty[$, on *metrinen avaruus*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $x, y, z \in X$:

1. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*metriikan kolmioepäyhtälö*),
2. $d(x, y) = d(y, x)$ ja
3. $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$.

Kuvausta d kutsutaan X:n *metriikaksi* tai *etäisyyskuvaukseksi*. Lukua $d(x, y)$ voidaan kutsua pisteiden x ja y *väliseksi etäisyydeksi* (metrisessä avaruudessa (X, d)).

Metriikka

Määritelmä

Pari (X, d), missä $d\colon X \times X \to [0, \infty[$, on *metrinen avaruus*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $x, y, z \in X$:

1. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*metriikan kolmioepäyhtälö*),
2. $d(x, y) = d(y, x)$ ja
3. $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$.

Kuvausta d kutsutaan X:n *metriikaksi* tai *etäisyyskuvaukseksi*. Lukua $d(x, y)$ voidaan kutsua pisteiden x ja y *väliseksi etäisyydeksi* (metrisessä avaruudessa (X, d)).

Tunnettu esimerkki metriikasta on euklidinen metriikka.

Normi

Määritelmä

Olkoon E reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $\|\cdot\| : E \to [0, \infty[$ on avaruuden E *normi*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $x, y \in E$ ja $a \in \mathbb{R}$:

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*normin kolmioepäyhtälö*),
2. $\|ax\| = |a|\,\|x\|$ ja
3. $\|x\| = 0$, jos ja vain jos $x = \mathbf{0}$.

Reaalista vektoriavaruutta E varustettuna sen normilla $\|\cdot\|$ kutsutaan *normiavaruudeksi*.

Normi liittyy yksinkertaisella tavalla metriikkaan:

Määritelmä

Olkoon E normiavaruus. Normiavaruuden E *normia $\|.\|$ vastaava metriikka* on kuvaus $d\colon E \times E \to [0, \infty[$,

$$d(x, y) = \|x - y\| .$$

Normi liittyy yksinkertaisella tavalla metriikkaan:

Määritelmä

Olkoon E normiavaruus. Normiavaruuden E *normia $\|.\|$ vastaava metriikka* on kuvaus $d\colon E \times E \to [0, \infty[$,

$$d(x, y) = \|x - y\| .$$

Lause

Normiavaruuden E normia $\|\cdot\|$ vastaava metriikka d on todella metriikka.

Sisätulo

Määritelmä

Olkoon E reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $\cdot\colon E \times E \to \mathbb{R}$ on avaruuden E *sisätulo*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $x, y, z \in E$ ja $a \in \mathbb{R}$:

1. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$,
2. $(ax) \cdot y = a(x \cdot y)$,
3. $x \cdot y = y \cdot x$,
4. $x \cdot x \geq 0$ ja
5. $x \cdot x = 0$, jos ja vain jos $x = \mathbf{0}$.

Määritelmä

Sisätuloavaruuden E *sisätuloa · vastaava normi* on kuvaus $\|\cdot\| : E \to [0, \infty[$,

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}.$$

Määritelmä

Sisätuloavaruuden E *sisätuloa $\cdot$ vastaava normi* on kuvaus $\|\cdot\| : E \to [0, \infty[$,

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}.$$

Lemma

Olkoon E sisätuloavaruus, $\cdot$ sen sisätulo ja $\|\cdot\|$ sisätuloa vastaava normi. Tällöin $\|\cdot\|$ on hyvin määritelty kuvaus $E \to [0, \infty[$, joka toteuttaa normille asetetut ehdot 2 ja 3.

Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälö

Lause (Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälö)

Olkoon E sisätuloavaruus, $\cdot$ sen sisätulo ja $\|\cdot\|$ sisätuloa vastaava normi. Tällöin jokaisella $x, y \in E$ pätee

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\| \, .$$

Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälö

Lause (Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälö)

Olkoon E sisätuloavaruus, $\cdot$ sen sisätulo ja $\|\cdot\|$ sisätuloa vastaava normi. Tällöin jokaisella $x, y \in E$ pätee

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\| \, .$$

Seuraus

Sisätuloa vastaava normi on todellakin normi.

Suunnikassääntö

Lause (Suunnikassääntö)

Sisätuloavaruudessa E on voimassa

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

kun $x, y \in E$.

Metriikasta välissäolorelaatio

Lemma

Olkoon E normiavaruus ja d normia vastaava metriikka. Tällöin jos pisteillä $a, b, c \in E$ pätee $B(a, b, c)$, niin

$$d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$$

Yhden-, saman- ja vastakkaissuuntaisuus

Määritelmä

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $x, y \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. Tällöin vektorien x ja y sanotaan olevan *yhdensuuntaiset*, jos $\ell(\mathbf{0}, x) \parallel \ell(\mathbf{0}, y)$. Tätä merkitään $x \parallel y$.

Yhden-, saman- ja vastakkaissuuntaisuus

Määritelmä

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $x, y \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. Tällöin vektorien x ja y sanotaan olevan *yhdensuuntaiset*, jos $\ell(\mathbf{0}, x) \parallel \ell(\mathbf{0}, y)$. Tätä merkitään $x \parallel y$.

Havaitaan, että $x \parallel y$ täsmälleen silloin, kun $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pätee $x = \lambda y$.

Yhden-, saman- ja vastakkaissuuntaisuus

Määritelmä

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $x, y \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. Tällöin vektorien x ja y sanotaan olevan *yhdensuuntaiset*, jos $\ell(\mathbf{0}, x) \parallel \ell(\mathbf{0}, y)$. Tätä merkitään $x \parallel y$.

Havaitaan, että $x \parallel y$ täsmälleen silloin, kun $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pätee $x = \lambda y$.

Määritelmä

Vektorien x ja y sanotaan olevan *samansuuntaiset*, jos on olemassa $\lambda > 0$, jolla $x = \lambda y$. Vektorien x ja y samansuuntaisuutta merkitään $x \uparrow\uparrow y$. Vektorit x ja y ovat *vastakkaissuuntaiset*, jos on olemassa $\lambda < 0$, jolla $x = \lambda y$, mitä merkitään $x \uparrow\downarrow y$.

Välissäolon metrinen karakterisointi

Lause

Olkoon V sisätuloavaruus. Tällöin kaikille $x, y \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ pätee

1. $x \cdot y = \|x\| \, \|y\| \iff x \uparrow\uparrow y$ *ja*
2. $|x \cdot y| = \|x\| \, \|y\| \iff x \parallel y$.

Lause (Välissäolon metrinen karakterisointi)

Olkoon E sisätuloavaruus. Tällöin kaikille $x, y, z \in E$ pätee

$$B(x, y, z) \iff d(x, y) + d(y, z) = d(x, z),$$

missä d on sisätuloavaruuden E sisätuloa vastaava metriikka ja B on välissäolorelaatio.

Puoliavaruus

Määritelmä

Olkoon V äärellisulotteinen reaalinen vektoriavaruus. Joukkoa $S \subseteq V$ kutsutaan *puoliavaruudeksi*, jos on olemassa V:n hypertaso H ja $v \in V \setminus U$, missä U on H:n suunta-avaruus, joiden avulla S voidaan esittää muodossa

$$S = \{y + \lambda v \mid y \in H, \lambda \geq 0\}.$$

Hypertasoa H kutsutaan puoliavaruuden S *reunaksi*. Tason puoliavaruutta kutsutaan *puolitasoksi* ja suoran puoliavaruutta kutsutaan *puolisuoraksi*.
Puolitason reunaa kutsutaan sen *reunasuoraksi* ja puolisuoran reunaa taas sen *alkupisteeksi*.

Kupera verho

Määritelmä

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $S \subseteq V$. Joukon S *kupera verho* (eng. convex hull) on joukon S kaikkien kuperien kombinaatioiden joukko ts. joukko

$$\operatorname{hull}(S) = \left\{ \sum_{a \in S_0} t_a a \;\middle|\; S_0 \subseteq S \text{ äärellinen }, t_a \geq 0 \text{ ja } \sum_{a \in S_0} t_a = 1 \right\}$$

Lause

Kun V on reaalinen vektoriavaruus ja $S \subseteq V$, niin $S \subseteq hull(S)$, $hull(S)$ on kupera ja $hull(S)$ on suppein kupera joukko, jolla on nämä ominaisuudet.

Määritelmä

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Kaikkia seuraavassa määriteltäviä kulmia kutsutaan vektoriavaruuden V *kulmiksi*.

1. Olkoot s ja s' samasta pisteestä p lähteviä eri puolisuoria, joiden yhdiste ei ole suora. Tällöin *kylkien s ja s' sisälle jäävä kulma* on $\mathrm{hull}(S)$. *Kylkien s ja s' ulkopuolelle jäävä kulma* on $(T \setminus \mathrm{hull}(s \cup s')) \cup s \cup s'$, missä T on se yksikäsitteinen taso, jolle $s, s' \subseteq T$. Pistettä p kutsutaan kulman *kärjeksi*.
2. Puolisuorat ovat vektoriavaruuden V *nollakulmia*. Tasot ovat vektoriavaruuden V *täysiä kulmia*. Puolisuoran s tapauksessa tulkitaan, että s ja s ovat nollakulman *kylkiä* ja puolisuoran alkupiste on sen *kärki*. Täyden kulman tapauksessa mielivaltainen tason T piste kelpaa sen kärjeksi ja siitä lähtevä T:n puolisuora kyljeksi.
3. Vektoriavaruuden V puolitasot ovat *oikokulmia*. Jos Γ on vektoriavaruuden V puolitaso, niin sen reunasuoran ℓ mitä tahansa pistettä p voidaan kutsua Γ:n kärjeksi. Piste p jakaa suoran ℓ kahdeksi puolisuoraksi, joita voidaan kutsua Γ:n kyljiksi.

Kulman suuruus

Merkintä

Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $p, a, b \in V$ sen kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla. Merkitään tällöin $\Gamma(a, p, b)$:llä kylkien s ja s' sisään jäävää kulmaa, missä

$$\begin{aligned} s &= \{p + t(a - p) \mid t \geq 0\} \\ s' &= \{p + t(b - p) \mid t \geq 0\} \end{aligned}$$

ovat puolisuoria.

Määritelmä

Olkoon E sisätuloavaruus ja Γ sen kulma. Kulman Γ *suuruus* määritellään eri tapauksissa seuraavasti.

1. Nollakulman suuruus on 0, oikokulman suuruus on π ja täyden kulman suuruus on 2π.
2. Oletetaan sitten, että Γ on kylkien s ja s' sisälle jäävä kulma ts. s ja s' ovat pisteestä p alkavia puolisuoria ja $s \cup s'$ ei ole suora. Valitaan $a \in s \setminus \{p\}$ ja $b \in s' \setminus \{p\}$. Tällöin kulman Γ suuruus on
$$\measuredangle(a, p, b) = \arccos \frac{(a-p) \cdot (b-p)}{\|a-p\| \, \|b-p\|}$$
3. Kylkien s ja s' ulkopuolelle jäävän kulman Γ suuruus on vastaavasti $2\pi - \alpha$, missä α on kylkien s ja s' sisään jäävä kulma.

Määritelmä

Olkoon E sisätuloavaruus ja Γ sen kulma. Kulman Γ *suuruus* määritellään eri tapauksissa seuraavasti.

1. Nollakulman suuruus on 0, oikokulman suuruus on π ja täyden kulman suuruus on 2π.
2. Oletetaan sitten, että Γ on kylkien s ja s' sisälle jäävä kulma ts. s ja s' ovat pisteestä p alkavia puolisuoria ja $s \cup s'$ ei ole suora. Valitaan $a \in s \setminus \{p\}$ ja $b \in s' \setminus \{p\}$. Tällöin kulman Γ suuruus on
$$\measuredangle(a, p, b) = \arccos \frac{(a-p) \cdot (b-p)}{\|a-p\| \, \|b-p\|}$$
3. Kylkien s ja s' ulkopuolelle jäävän kulman Γ suuruus on vastaavasti $2\pi - \alpha$, missä α on kylkien s ja s' sisään jäävä kulma.

Määritelmä

Kulman Γ on *suora*, jos sen suuruus on $\pi/2$.

Vektorien kohtisuoruus

Huomautus

Jos $\Gamma = \Gamma(a, p, b)$, niin se on suora, jos ja vain jos

$$\arccos \frac{(a-p)\cdot(b-p)}{\|a-p\|\,\|b-p\|} = \frac{\pi}{2}$$
$$\iff \frac{(a-p)\cdot(b-p)}{\|a-p\|\,\|b-p\|} = 0$$
$$\iff (a-p)\cdot(b-p) = 0.$$

Määritelmä

Reaalisen vektoriavaruuden V vektorit a ja b ovat keskenään *kohtisuorassa*, $a \perp b$, jos $\measuredangle(a, \mathbf{0}, b) = \pi/2$ eli $a \cdot b = 0$ $(a, b \neq \mathbf{0})$.

Vektorien kohtisuoruus

Huomautus

Jos $\Gamma = \Gamma(a, p, b)$, niin se on suora, jos ja vain jos

$$\begin{aligned} \arccos \frac{(a-p)\cdot(b-p)}{\|a-p\|\,\|b-p\|} = \frac{\pi}{2} \\ \iff \frac{(a-p)\cdot(b-p)}{\|a-p\|\,\|b-p\|} = 0 \\ \iff (a-p)\cdot(b-p) = 0. \end{aligned}$$

Määritelmä

Reaalisen vektoriavaruuden V vektorit a ja b ovat keskenään *kohtisuorassa*, $a \perp b$, jos $\measuredangle(a, \mathbf{0}, b) = \pi/2$ eli $a \cdot b = 0$ $(a, b \neq \mathbf{0})$.

Lemma

Olkoon Γ *kylkien* s *ja* s' *sisään jäävä kulma vektoriavaruudessa* V. *Tällöin* Γ *ei sisällä yhtään* V*:n suoraa (kokonaisuudessaan).*

Lemma

Olkoon Γ *kylkien* s *ja* s' *sisään jäävä kulma sisätuloavaruudessa* E. *Tällöin siis* s *ja* s' *ovat samasta pisteestä* p *lähteviä puolisuoria, joille* $s \cup s'$ *ei ole suora. Tässä tilanteessa kulman* Γ *suuruudelle* γ *pätee* $0 < \gamma < \pi$.
Vastaavasti jos Δ *jää kylkien* s *ja* s' *ulkopuolelle, niin* $\pi < \delta < 2\pi$, *missä* δ *on kulman* Δ *suuruus.*

Kulmien vertailu ja vierekkäiset kulmat

Lause

Olkoot Γ *ja* Δ *sisätuloavaruuden* E *kulmia, joille* $\Gamma \subseteq \Delta$. *Tällöin* $\gamma \leq \delta$, *missä* γ *on kulman* Γ *suuruus ja* δ *on kulman* Δ *suuruus.*

Kulmien vertailu ja vierekkäiset kulmat

Lause

Olkoot Γ ja Δ sisätuloavaruuden E kulmia, joille $\Gamma \subseteq \Delta$. Tällöin $\gamma \leq \delta$, missä γ on kulman Γ suuruus ja δ on kulman Δ suuruus.

Määritelmä

Vektoriavaruuden V kulmat Γ ja Γ' ovat *vierekkäiset*, jos Γ ja Γ' ovat samassa tasossa ja $\Gamma \cap \Gamma' = s$, missä s on sekä Γ:n että Γ':n kylki ts. Γ ja Γ' leikkaavat täsmälleen yhteisessä kyljessä.

Lause

Olkoon Γ ja Γ' sisätuloavaruuden E vierekkäiset kulmat, joiden suuruudet ovat γ ja γ'. Tällöin $\Delta = \Gamma \cup \Gamma'$ on kulma, jonka suuruus on $\delta = \gamma + \gamma'$.

Kompleksitaso

Kompleksiluvut

Määritelmä

Kompleksiluku z on reaalilukujen pari $z = (x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Lukua x kutsutaan kompleksiluvun z *reaaliosaksi* ja merkitään $x = \operatorname{Re} z$. Lukua y kutsutaan vastaavasti *imaginaariosaksi*, $y = \operatorname{Im} z$. Kahden kompleksiluvun $z = (x, y)$ ja $w = (u, v)$ *summa* on

$$z + w = (x + u, y + v)$$

ja *tulo* on

$$z \cdot w = (xu - yv, xv + uy).$$

Kompleksilukujen joukkoa merkitään

$$\mathbb{C} = \{\, (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \,\}.$$

Kompleksitaso vektoriavaruutena

Vektoreiden tulkinta: Edellisen määritelmän mukaan kompleksiluvut *ovat* reaalilukupareja eli tasovektoreita. Lisäksi kompleksilukujen summa ja tasovektoreiden summa ovat samoja laskutoimituksia, joten vektorisumma on yksi tarkasteltavan rakenteen laskutoimituksista.

Kompleksitaso vektoriavaruutena

Vektoreiden tulkinta: Edellisen määritelmän mukaan kompleksiluvut *ovat* reaalilukupareja eli tasovektoreita. Lisäksi kompleksilukujen summa ja tasovektoreiden summa ovat samoja laskutoimituksia, joten vektorisumma on yksi tarkasteltavan rakenteen laskutoimituksista.

Skalaareiden tulkinta: Tunnetuksi reaaliluvut samastetaan niiden kompleksilukujen kanssa, joiden toinen koordinaatti on nolla eli luku $x \in \mathbb{R}$ samastetaan kompleksiluvun $(x, 0) \in \mathbb{C}$ kanssa. Tässä mielessä siis $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ja skalaarit ovat tarkasteltavassa rakenteessa $(\mathbb{C}, +, \cdot, \bar{\cdot})$, missä symboli $\bar{\cdot}$ viittaa liittolukukuvaukseen.

Kompleksilukujen peruskäsitteitä

Imaginaariyksikköä $(0, 1)$ merkitään symbolilla i. Kun reaaliluvut samastetaan sovitulla tavalla x-akselin kompleksilukujen kanssa, niin pätee $(x, y) = x + y\mathrm{i}$, kun $x, y \in \mathbb{R}$.

Määritelmä

Kompleksiluvun $z = x + y\mathrm{i}$, $x, y \in \mathbb{R}$, *itseisarvo* on $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Luvun z *liittoluku* on $\overline{z} = x - y\mathrm{i}$.

Kompleksilukujen peruskäsitteitä

Imaginaariyksikköä $(0,1)$ merkitään symbolilla i. Kun reaaliluvut samastetaan sovitulla tavalla x-akselin kompleksilukujen kanssa, niin pätee $(x,y) = x + y\mathrm{i}$, kun $x, y \in \mathbb{R}$.

Määritelmä

Kompleksiluvun $z = x + y\mathrm{i}$, $x, y \in \mathbb{R}$, *itseisarvo* on $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Luvun z *liittoluku* on $\overline{z} = x - y\mathrm{i}$.

Lause

Kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee a) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, b) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ ja c) $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Kompleksilukujen peruskäsitteitä

Imaginaariyksikköä $(0,1)$ merkitään symbolilla i. Kun reaaliluvut samastetaan sovitulla tavalla x-akselin kompleksilukujen kanssa, niin pätee $(x,y) = x + y\mathrm{i}$, kun $x, y \in \mathbb{R}$.

Määritelmä

Kompleksiluvun $z = x + y\mathrm{i}$, $x, y \in \mathbb{R}$, *itseisarvo* on $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Luvun z *liittoluku* on $\overline{z} = x - y\mathrm{i}$.

Lause

Kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee a) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, *b)* $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ *ja c)* $\operatorname{Im} z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

Havaitaan, että jokaiselle kompleksiluvulle $z \in \mathbb{C}$ pätee

$$z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im} z = 0 \iff \frac{z-\overline{z}}{2i} = 0 \iff z - \overline{z} = 0 \iff z = \overline{z}.$$

Liittolukukuvaus

Lause

Liittolukukuvaus $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = \overline{z}$, *on kompleksilukujen kunnan* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *automorfismi. Se on siis sekä bijektio* $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *että homomorfismi eli säilyttää seuraavassa mielessä laskutoimitukset: Kun* $z, w \in \mathbb{C}$,

$$p(z+w) = p(z) + p(w) \text{ eli } \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$$

ja

$$p(z \cdot w) = p(z) \cdot p(w) \text{ eli } \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

Lisäksi $p \circ p = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, *joten kaikilla* $z \in \mathbb{C}$ *pätee* $\overline{\overline{z}} = z$.

Liittolukukuvaus

Lause

Liittolukukuvaus $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = \overline{z}$, *on kompleksilukujen kunnan* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *automorfismi. Se on siis sekä bijektio* $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *että homomorfismi eli säilyttää seuraavassa mielessä laskutoimitukset: Kun* $z, w \in \mathbb{C}$,

$$p(z+w) = p(z) + p(w) \text{ eli } \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$$

ja

$$p(z \cdot w) = p(z) \cdot p(w) \text{ eli } \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

Lisäksi $p \circ p = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, *joten kaikilla* $z \in \mathbb{C}$ *pätee* $\overline{\overline{z}} = z$.

Edellisestä lauseesta seuraa $\overline{-z} = -\overline{z}$ ja $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$, kun $z \neq 0$.

Sisätulo

Sisätulon tulkinta: Edeltävät tarkastelut osoittavat, että koko vektoriavaruus $\mathbb{R}^2$ kaikkine rakenteineen on tulkittavissa rakenteessa $(\mathbb{C}, +, \cdot, \bar{\cdot})$.

Sisätulo

Sisätulon tulkinta: Edeltävät tarkastelut osoittavat, että koko vektoriavaruus $\mathbb{R}^2$ kaikkine rakenteineen on tulkittavissa rakenteessa $(\mathbb{C}, +, \cdot, \bar{\cdot})$. Sisätuloavaruus $\mathbb{R}^2$ on vektoriavaruus $\mathbb{R}^2$ tavanomaisella sisätulolla eli pistetulolla varustettuna. Merkitään (epätavanomaisesti) tavanomaista sisätuloa symbolilla $\odot$, ts. kun $z = (x, y), w = (u, v) \in \mathbb{C}$, niin

$$z \odot w = xu + yv.$$

Sisätulo

Sisätulon tulkinta: Edeltävät tarkastelut osoittavat, että koko vektoriavaruus $\mathbb{R}^2$ kaikkine rakenteineen on tulkittavissa rakenteessa $(\mathbb{C}, +, \cdot, \bar{\cdot})$. Sisätuloavaruus $\mathbb{R}^2$ on vektoriavaruus $\mathbb{R}^2$ tavanomaisella sisätulolla eli pistetulolla varustettuna. Merkitään (epätavanomaisesti) tavanomaista sisätuloa symbolilla $\odot$, ts. kun $z = (x, y), w = (u, v) \in \mathbb{C}$, niin

$$z \odot w = xu + yv.$$

Huomataan, että

$$\begin{aligned} z\overline{w} &= (x + y\mathrm{i})(u - v\mathrm{i}) = xu - y(-v) + (yu + x(-v))\mathrm{i} \\ &= xu + yv + (yu - xv)\mathrm{i} = z \odot w + (yu - xv)\mathrm{i}, \end{aligned}$$

joten

$$z \odot w = \mathrm{Re}(z\overline{w}) = \frac{z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}}{2} = \frac{z\overline{w} + \overline{z}w}{2}.$$

Siis sisätuloavaruus $\mathbb{R}^2$ on tulkittavissa rakenteessa $(\mathbb{C}, +, \cdot, \bar{\cdot})$.

Normi

Tavanomainen normi osoittautuu kompleksiluvun itseisarvoksi:

Normi

Tavanomainen normi osoittautuu kompleksiluvun itseisarvoksi:

$$\sqrt{z \odot z} = \sqrt{\frac{z\bar{z} + \bar{z}z}{2}} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i})} = \sqrt{x^2 - y^2\mathrm{i}^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|\,,$$

kun $z = x + y\mathrm{i}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Normi

Tavanomainen normi osoittautuu kompleksiluvun itseisarvoksi:

$$\sqrt{z \odot z} = \sqrt{\frac{z\bar{z} + \bar{z}z}{2}} = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i})} = \sqrt{x^2 - y^2\mathrm{i}^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|,$$

kun $z = x + y\mathrm{i}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Itseisarvoa vastaa edelleen euklidinen metriikka tasossa: Pisteiden $z, w \in \mathbb{C}$ etäisyys on $|z - w|$.

Suorat ja kulmat kompleksitasossa

Kun $l \subseteq \mathbb{C}$ on kompleksitason suora, $a \in l$ ja $w \neq 0$ on suoran suunta (eli suunta-avaruuden virittäjä), niin suoralle l saadaan yhtälö

$$l = \{z\overline{\zeta} + \overline{z}\zeta + c = 0\},$$

missä $\zeta = -iw$ ja $c = -\mathrm{i}(\overline{a}w - a\overline{w})$.

Suorat ja kulmat kompleksitasossa

Kun $l \subseteq \mathbb{C}$ on kompleksitason suora, $a \in l$ ja $w \neq 0$ on suoran suunta (eli suunta-avaruuden virittäjä), niin suoralle l saadaan yhtälö

$$l = \{z\overline{\zeta} + \overline{z}\zeta + c = 0\},$$

missä $\zeta = -iw$ ja $c = -\mathrm{i}(\overline{a}w - a\overline{w})$.

Tarkastellaan kulmaa, jonka kärki on origossa ja jonka kylkien pisteitä $b, c \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ ovat. Tällöin

$$\measuredangle(b, 0, c) = \arccos \frac{b \odot c}{|b|\,|c|}.$$

Napaesitykset

Määritelmä

Kompleksiluvun z *argumentti* on se yksikäsitteinen $\varphi \in [0, 2\pi[$, jolle $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, kun $z \neq 0$. Tapauksessa $z = 0$ sovitaan, että argumentti on 0. Luvun z argumenttia merkitään $\arg z$.

Napaesitykset

Määritelmä

Kompleksiluvun z *argumentti* on se yksikäsitteinen $\varphi \in [0, 2\pi[$, jolle $z = |z|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, kun $z \neq 0$. Tapauksessa $z = 0$ sovitaan, että argumentti on 0. Luvun z argumenttia merkitään $\arg z$.

Jokaiselle $z \in \mathbb{C}$ saadaan siis yksikäsitteinen *napaesitys*

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

missä $r = |z| = |z - 0|$ on pisteen z etäisyys origosta ja $\varphi = \arg w$.
Huomattakoon, että

$$\overline{z} = \overline{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = r(\overline{\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi}) = r(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi)) = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}.$$

Napaesitys ja kulmat

Tarkastellaan jälleen kulmaa $\Gamma(b, 0, c)$. Etsitään kulman kyljillä oleville pisteille napaesitykset: $b = B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ ja $c = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$, missä siis $B \geq 0$, $C \geq 0$ ja $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Laskemalla saadaan

$$\measuredangle(b, 0, c) = \beta - \gamma,$$

jos $\gamma \leq \beta \leq \gamma + \pi$.

Isometria

Tavoitteena on tutkia tason yhtenevyyskuvauksia, mutta tehdään ensin pohjatyötä yleisemmin metrissä avaruuksissa ja erityisesti sitätuloavaruuksissa.

Määritelmä

Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on *isometria*, jos kaikilla $x, y \in X$ pätee

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Isometrioita $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kutsutaan *yhtenevyyskuvauksiksi*.

Isometria

Tavoitteena on tutkia tason yhtenevyyskuvauksia, mutta tehdään ensin pohjatyötä yleisemmin metrissä avaruuksissa ja erityisesti sitätuloavaruuksissa.

Määritelmä

Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on *isometria*, jos kaikilla $x, y \in X$ pätee

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Isometrioita $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kutsutaan *yhtenevyyskuvauksiksi*.

Huomautus

Usein isometriasta vaaditaan myös, että sen pitäisi olla bijektio.

Normin ja sisätulon säilymiset

Määritelmä

Olkoot E ja F normiavaruuksia sekä $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ vastaavat normit. Olkoon edelleen $f\colon E \to F$. Kuvaus f *säilyttää normin*, jos kaikilla $x \in E$ pätee

$$\|f(x)\|' = \|x\|.$$

Normin ja sisätulon säilymiset

Määritelmä

Olkoot E ja F normiavaruuksia sekä $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ vastaavat normit. Olkoon edelleen $f\colon E \to F$. Kuvaus f *säilyttää normin*, jos kaikilla $x \in E$ pätee

$$\|f(x)\|' = \|x\|.$$

Määritelmä

Olkoot E ja F sisätuloavaruuksia sekä $\cdot$, $\cdot'$ vastaavat sisätulot. Olkoon edelleen $f\colon E \to F$. Kuvaus f *säilyttää sisätulon*, jos kaikilla $x, y \in E$ pätee

$$f(x) \cdot' f(y) = x \cdot y$$

Lemma

Olkoot E *ja* F *normiavaruuksia, joissa on normit* $\|\cdot\|$ *ja* $\|\cdot\|'$ *sekä* $f\colon E \to F$.

- (a) *Jos* f *on isometria ja* $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, *niin* f *säilyttää normin.*
- (b) *Jos* f *on normin säilyttävä lineaarikuvaus, niin* f *on isometria.*

Lemma

Olkoot E ja F normiavaruuksia, joissa on normit $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ sekä $f\colon E \to F$.

a. *Jos f on isometria ja $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, niin f säilyttää normin.*
b. *Jos f on normin säilyttävä lineaarikuvaus, niin f on isometria.*

Lemma

Olkoot E ja F sisätuloavaruuksia sekä $f\colon E \to F$ lineaarikuvaus. Tällöin f säilyttää normin, jos ja vain jos f säilyttää sisätulon.

Sisätulon säilyttävien kuvauksien karakterisointi

Lause

Olkoot E ja F sisätuloavaruuksia sekä $f : E \to F$ sisätulon säilyttävä kuvaus. Tällöin f on lineaarikuvaus.

Sisätulon säilyttävien kuvauksien karakterisointi

Lause

Olkoot E ja F sisätuloavaruuksia sekä $f\colon E \to F$ sisätulon säilyttävä kuvaus. Tällöin f on lineaarikuvaus.

Kootaan saadut tulokset:

Lause

Olkoot E ja F sisätuloavaruuksia sekä $f\colon E \to F$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:

a. *f säilyttää sisätulon.*
b. *f on normin säilyttävä lineaarikuvaus.*
c. *f on isometria, jolle $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.*

Isometriaryhmä

Seuraus

Yhtenevyyskuvaukset säilyttävät kulmat, ts. jos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *on yhtenevyyskuvaus ja* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, *niin*

$$\measuredangle(f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}), f(\mathbf{c})) = \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Isometriaryhmä

Seuraus

Yhtenevyyskuvaukset säilyttävät kulmat, ts. jos $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *on yhtenevyyskuvaus ja* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, *niin*

$$\measuredangle(f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}), f(\mathbf{c})) = \measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Lause

Olkoon V *sisätuloavaruus. Tällöin* $(\mathrm{Isom}(V), \circ)$ *on ryhmä, missä*

$$\mathrm{Isom}(V) := \{\, f : V \to V \mid f \text{ on bijektiivinen isometria} \,\}.$$

Perusyhtenevyyskuvaukset

Esimerkki

(a) Olkoon $t \in \mathbb{C}$. Tällöin *siirto s_t kompleksiluvun t verran* eli kuvaus $s_t \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$s_t(z) = z + t,$$

on yhtenevyyskuvaus.

Perusyhtenevyyskuvaukset

Esimerkki

a. Olkoon $t \in \mathbb{C}$. Tällöin *siirto s_t kompleksiluvun t verran* eli kuvaus $s_t\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$s_t(z) = z + t,$$

on yhtenevyyskuvaus.

b. Liittolukukuvaus $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = \bar{z}$, eli *peilaus x-akselin suhteen* on myös yhtenevyyskuvaus.

Perusyhtenevyyskuvaukset

Esimerkki

a. Olkoon $t \in \mathbb{C}$. Tällöin *siirto s_t kompleksiluvun t verran* eli kuvaus $s_t \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,
$$s_t(z) = z + t,$$
on yhtenevyyskuvaus.

b. Liittolukukuvaus $p \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = \overline{z}$, eli *peilaus x-akselin suhteen* on myös yhtenevyyskuvaus.

c. Olkoon $\varphi \in \mathbb{R}$. Tällöin *kierto k_φ kulman φ verran origon ympäri*, missä $k_\varphi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,
$$k_\varphi(z) = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$
on samoin yhtenevyyskuvaus.

Lemma

Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *yhtenevyyskuvaus. Tällöin on olemassa sellainen* $t \in \mathbb{C}$ *ja yhtenevyyskuvaus* $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *että* $g(0) = 0$ *ja* $f = s_t \circ g$.

Lemma

Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *yhtenevyyskuvaus. Tällöin on olemassa sellainen* $t \in \mathbb{C}$ *ja yhtenevyyskuvaus* $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, että* $g(0) = 0$ *ja* $f = s_t \circ g$*.*

Lemma

Olkoon $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *yhtenevyyskuvaus, jolle* $g(0) = 0$*. Tällöin on olemassa sellainen* $\varphi \in [0, 2\pi[$*, että* $g(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ *ja* $g = k_\varphi \circ h$*, missä* $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *on yhtenevyyskuvaus, jolle* $h(0) = 0$ *ja* $h(1) = 1$*.*

Lemma

Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *yhtenevyyskuvaus. Tällöin on olemassa sellainen* $t \in \mathbb{C}$ *ja yhtenevyyskuvaus* $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *että* $g(0) = 0$ *ja* $f = s_t \circ g$.

Lemma

Olkoon $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *yhtenevyyskuvaus, jolle* $g(0) = 0$. *Tällöin on olemassa sellainen* $\varphi \in [0, 2\pi[$, *että* $g(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ *ja* $g = k_\varphi \circ h$, *missä* $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *on yhtenevyyskuvaus, jolle* $h(0) = 0$ *ja* $h(1) = 1$.

Lause

Peilaus p x*-akselin suhteen, kierto* k_φ *kulman* φ *verran origon ympäri* ($\varphi \in [0, 2\pi[$) *ja siirto* s_t *vektorin* $t \in \mathbb{C}$ *verran ovat tason yhtenevyyskuvauksia. Jokainen tason yhtenevyyskuvaus* f *on yhdistetty kuvaus näistä, itse asiassa on olemassa kulma* $\varphi \in [0, 2\pi[$ *ja vektori* $t \in \mathbb{C}$, *joille*

$$f = s_t \circ k_\varphi \text{ tai } f = s_t \circ k_\varphi \circ p.$$

Edellisestä lauseesta seuraa, että tason yhtenevyyskuvaukset ovat affiineja kuvauksia. Itse asiassa tämä pätee yleisestikin.

Edellisestä lauseesta seuraa, että tason yhtenevyyskuvaukset ovat affiineja kuvauksia. Itse asiassa tämä pätee yleisestikin.

Lause

Yhtenevyyskuvaukset ovat affiineja kuvauksia.

Edellisestä lauseesta seuraa, että tason yhtenevyyskuvaukset ovat affiineja kuvauksia. Itse asiassa tämä pätee yleisestikin.

Lause

Yhtenevyyskuvaukset ovat affiineja kuvauksia.

Lemma

Olkoot $t \in \mathbb{C}$ *ja* $\varphi \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

a. $s_t \circ k_\varphi = k_\varphi \circ s_{t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}$,
b. $s_t \circ p = p \circ s_{\bar{t}}$ *ja*
c. $k_\varphi \circ p = p \circ k_{-\varphi}$.

Suoruus

Lemma

Kaikilla $t, t', \varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$ *pätee*

$$s_t \circ k_\varphi \neq s_{t'} \circ k_{\varphi'} \circ p.$$

Suoruus

Lemma

Kaikilla $t, t', \varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$ *pätee*

$$s_t \circ k_\varphi \neq s_{t'} \circ k_{\varphi'} \circ p.$$

Määritelmä

Tason yhtenevyyskuvaus $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on *suora*, jos $f = s_t \circ k_\varphi$ joillain $t, \varphi \in \mathbb{R}$.

Lause

Kuvaus $\varepsilon\colon \mathrm{Isom}(\mathbb{C}) \to \{-1, 1\}$,

$$\varepsilon(f) = \begin{cases} 1, & \textit{kun } f \textit{ on suora yhtenevyyskuvaus} \\ -1, & \textit{muuten} \end{cases}$$

on homomorfismi kompleksitason yhtenevyyskuvausten ryhmästä $(\mathrm{Isom}(\mathbb{C}), \circ)$ *kertolaskuryhmään* $(\{-1, 1\}, \cdot)$. *Erityisesti suorat yhtenevyyskuvaukset muodostavat tason yhtenevyyskuvausten aliryhmän, so.* $(G, \circ)$ *on ryhmän* $(\mathrm{Isom}(\mathbb{C}), \circ)$ *aliryhmä, missä*

$$G = \mathrm{Ker}(\varepsilon) = \{\, f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}) \mid f \textit{ on suora yhtenevyyskuvaus} \,\}.$$

Kiintopisteet

Määritelmä

Alkio $a \in A$ on kuvauksen $f\colon A \to A$ *kiintopiste*, jos $f(a) = a$.

Lemma

Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ yhtenevyyskuvauksen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kiintopisteiden joukko $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \,\}$ on joko tyhjä tai $\mathbb{R}^n$:n affiini aliavaruus.

kiintopisteiden joukko	**suorat yhtenevyyskuvaukset**	**epäsuorat yht.kuvaukset**
$\mathbb{C}$	$\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$	-
suora	-	peilaus suoran suhteen
yksiö	kierto	-
$\emptyset$	epätriviaali siirto	liukupeilaus

Esimerkki

Yhtenevyyskuvaus $f = p \circ s_1$ on esimerkki yhtenevyyskuvauksesta, joka ei ole siirto, mutta jolla ei ole myöskään kiintopisteitä. Kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee nimittäin

$$f(z) = \overline{z+1} = \bar{z} + 1$$

ja siis

$$(f \circ f)(z) = \overline{\overline{z+1}+1} = z + 2 \neq z.$$

Lisäksi

$$\mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(z) + 1,$$

joten kyseessä ei ole siirto, vaan liukupeilaus.

Symmetriaryhmä

Määritelmä

Olkoon $K \subseteq \mathbb{C}$ tasokuvio. Kuvion K *symmetriaryhmä* on $(\mathrm{Sym}(K), \circ)$, missä $\mathrm{Sym}(K)$ on niiden tason yhtenevyyskuvausten f joukko, joille

$$f[K] = \{ f(x) \mid x \in K \} = K.$$

$\mathrm{Sym}(K)$:n alkioita kutsutaan K:n *symmetriakuvauksiksi* eli *symmetrioiksi*.

Symmetriaryhmä

Määritelmä

Olkoon $K \subseteq \mathbb{C}$ tasokuvio. Kuvion K *symmetriaryhmä* on $(\mathrm{Sym}(K), \circ)$, missä $\mathrm{Sym}(K)$ on niiden tason yhtenevyyskuvausten f joukko, joille

$$f[K] = \{ f(x) \mid x \in K \} = K.$$

$\mathrm{Sym}(K)$:n alkioita kutsutaan K:n *symmetriakuvauksiksi* eli *symmetrioiksi*.

Lause

Kuvion $K \subseteq \mathbb{C}$ symmetriaryhmä on ryhmä.

Esimerkki

Olkoot $a, b, c \in \mathbb{C}$ kolmion kärjet ja $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ vastaava kolmio sisuksineen. Olkoon $f \in \mathrm{Sym}(\Delta)$. Huomataan, että rajoittuma

$$\sigma := f \restriction \{a, b, c\} \colon \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$$

on joukon $\{a, b, c\}$ permutaatio, joka määrää f:n. Tästä seuraa, että $(G, \circ)$ on joukon $\{a, b, c\}$ permutaatioryhmä, missä

$$G = \left\{ f \restriction \{a, b, c\} \,\middle|\, f \in \mathrm{Sym}(\Delta) \right\}.$$

Siis

$$|\mathrm{Sym}(\Delta)| = |G| \leq 6.$$

Esimerkki

Symmetrioiden lukumäärä riippuu sivujen pituuksista seuraavasti:

1. Jos kaikki sivut ovat eri pituisia, niin
$$\{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Sym}(\Delta)$$
ja symmetrioiden lukumäärä on 1.
2. Oletetaan, että Δ on tasakylkinen, mutta ei tasasivuinen. Oletetaan, että ab on kanta ja ac, bc kyljet. Siis $|c-a| = |c-b| \neq |b-a|$. Tällöin laskuharjoitusten perusteella on olemassa kuvaus $f \in \mathrm{Sym}(\Delta)$, jolle $f(a) = f(b), f(b) = f(a)$ ja $f(c) = c$. Pisteitä ei myöskään voida permutoida muilla epätriviaaleilla tavoilla. Siis $\mathrm{Sym}(\Delta) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}, f\}$.
3. Oletetaan, että Δ on tasasivuinen. Tällöin symmetrioita on täydet 6 kappaletta.

Rajoittuneisuuden vaikutus symmetriaryhmään

Lause

Olkoon $K \subseteq \mathbb{C}$ epätyhjä tasokuvio, jonka symmetriaryhmä sisältää epätriviaalin siirron. Tällöin K on rajoittamaton eli se sisältää mielivaltaisen etäällä toisistaan olevia pisteitä.

Merkintä

Olkoon K tasokuvio. Merkitään jokaisella yhtenevyyskuvauksella f

$$\mathrm{Fix}(f) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid f(z) = z \,\}.$$

Merkitään lisäksi

$$\mathrm{Fix}(K) = \bigcap_{f \in \mathrm{Sym}(K)} \mathrm{Fix}(f).$$

Aiemmin on jo todettu, että $\mathrm{Fix}(K)$ on aina joko tyhjä tahi yksiö, suora tai koko taso.

Symmetriakeskus

Määritelmä

Olkoon K tasokuvio. Jos jollakin pisteellä $a \in \mathbb{C}$ pätee

$$\mathrm{Fix}(K) = \{a\},$$

niin pistettä a kutsutaan kuvion K *symmetriakeskipisteeksi* eli *symmetriakeskukseksi*. Jos jollakin suoralla $l \subseteq \mathbb{C}$ pätee, että $p_l \in \mathrm{Sym}(K)$, niin suoraa l kutsutaan kuvion K *symmetria-akseliksi*.

Määritelmä

Tason yhtenevyyskuvaus f on *peilaus*, jos

$$f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \quad f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{C}}\,.$$

Rajoitetun tasokuvion symmetriat

Lemma

Rajoitetun tasokuvion symmetriaryhmässä on identtisen kuvauksen lisäksi vain kiertoja ja peilauksia.

Rajoitetun tasokuvion symmetriat

Lemma

Rajoitetun tasokuvion symmetriaryhmässä on identtisen kuvauksen lisäksi vain kiertoja ja peilauksia.

Lemma

Olkoon $K \subseteq \mathbb{C}$ *rajoitettu. Olkoot* f *kierto, jonka kiertokeskus on* a *ja* g *kierto, jonka kiertokeskus on* b*. Jos* $f, g \in \mathrm{Sym}(K)$*, niin* $a = b$*.*

Rajoitetun tasokuvion symmetriat

Lemma

Rajoitetun tasokuvion symmetriaryhmässä on identtisen kuvauksen lisäksi vain kiertoja ja peilauksia.

Lemma

Olkoon $K \subseteq \mathbb{C}$ *rajoitettu. Olkoot* f *kierto, jonka kiertokeskus on* a *ja* g *kierto, jonka kiertokeskus on* b*. Jos* $f, g \in \mathrm{Sym}(K)$*, niin* $a = b$*.*

Lemma

Olkoon $K \neq \emptyset$ *rajoitettu pistejoukko,* f *epätriviaali kierto pisteen* a *ympäri ja* $p_l, p_{l'}$ *peilauksia suorien* l *ja* l' *suhteen. Tällöin*

1. *Jos* $f, p_l \in \mathrm{Sym}(K)$*, niin piste* a *on suoralla* l*.*
2. *Jos* $p_l, p_{l'} \in \mathrm{Sym}(K), l \neq l'$*, niin* l *ja* l' *eivät ole yhdensuuntaisia eli ne leikkaavat.*

Lause

Olkoon $K \neq \emptyset$ rajoitettu tasokuvio. Oletetaan, että K:lla on epätriviaali symmetriaryhmä, ts. on olemassa sellainen $f \in \mathrm{Sym}(K)$, että $f \neq \mathsf{id}_{\mathbb{C}}$. Tällöin K:lla on joko symmetriakeskus tai $\mathrm{Fix}(K)$ on suora.

Tarskin aksiomaattinen geometria

Geometrian aksioomajärjelmiä

Aksiooma-järjestelmä	**oliot**	**relaatiot**	**logiikka**
Eukleideen	pisteet ja suorat	insidenssi eli kohtaaminen	epämuodollinen
Hilbertin	pisteet ja suorat	kohtaaminen	formalisoituva, logiikka vahvampi kuin predikaattilogiikka
Tarskin	pisteet	välissäolo ja janojen yhtenevyys	predikaattilogiikka

Tarskin järjestelmän relaatiot

Alfred Tarskin esittämä järjestelmä on sikäli Eukleideen ja Hilbertin aksioomajärjestelmiä yksinkertaisempi, että geometrian perusolioiksi on valittu vain pisteet. Perusrelaatioiden valintaa voi perustella seuraavasti: Aiemmin kurssilla on näytetty, että affiini geometria perustuu vahvasti välissäolon käsitteeseen. Erityisesti tiedetään, että affiinit bijektiot $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ säilyttävät välissäolon vahvasti.

Tarskin järjestelmän relaatiot

Alfred Tarskin esittämä järjestelmä on sikäli Eukleideen ja Hilbertin aksioomajärjestelmiä yksinkertaisempi, että geometrian perusolioiksi on valittu vain pisteet. Perusrelaatioiden valintaa voi perustella seuraavasti: Aiemmin kurssilla on näytetty, että affiini geometria perustuu vahvasti välissäolon käsitteeseen. Erityisesti tiedetään, että affiinit bijektiot $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ säilyttävät välissäolon vahvasti.

Affiini geometria ei kuitenkaan kata geometriassa esiintyviä metriikkaan liittyviä käsitteitä. Aksioomissa ei kuitenkaan voida viitata geometrisen avaruuden ulkopuolisiin matemaattisiin olioihin (koska näitä ei ole valittu perusolioiksi), joten etäisyyksistä ei suoranaisesti voida puhua aksioomissa. Tämän tilalle valitaan pisteiden välinen nelipaikkainen relaatio, jonka tarkoituksena on ilmaista, että kahden ensimmäisen pisteen välinen jana on samanpituinen (eli yhtenevä) kahden jälkimmäisen pisteen välisen janan kanssa. Tämän relaation ilmaisuvoima on heikompi kuin etäisyyden, mutta riittävä geometrian tarpeisiin.

Standardimalli

Aksioomien standarditulkinta on seuraava: Aksioomat puhuvat euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pisteistä ja niiden välisistä suhteista. Perusrelaatiot ovat jo aiemmin esitelty *välissäolorelaatio*

$$B = \{\, (x, y, z) \in (\mathbb{R}^n)^3 \mid \exists \lambda \in [0, 1] : y = \lambda x + (1 - \lambda) z \,\},$$

ja *janojen samanpituisuus* $\equiv$, jolle kaikilla $x, y, z, t \in \mathbb{R}^n$ pätee, että

$$\equiv (x, y, z, t) \Leftrightarrow |x - y| = |z - t| \,.$$

Standardimalli

Aksioomien standarditulkinta on seuraava: Aksioomat puhuvat euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pisteistä ja niiden välisistä suhteista. Perusrelaatiot ovat jo aiemmin esitelty *välissäolorelaatio*

$$B = \{\, (x, y, z) \in (\mathbb{R}^n)^3 \mid \exists \lambda \in [0, 1] : y = \lambda x + (1 - \lambda) z \,\},$$

ja *janojen samanpituisuus* $\equiv$, jolle kaikilla $x, y, z, t \in \mathbb{R}^n$ pätee, että

$$\equiv (x, y, z, t) \Leftrightarrow |x - y| = |z - t| \,.$$

Kolmikkoa $(\mathbb{R}^n, B, \equiv)$ kutsutaan täten Tarskin aksioomien *standardimalliksi*. Toisaalta meidän on siis jatkossa vakuututtuva siitä, että esitetyt aksioomat pätevät standardimalleissa, toisaalta aksioomia voi soveltaa missä tahansa mallissa E, jossa ne pätevät.

Janojen kongruenssiaksioomat

Selvyyden vuoksi seuraavissa aksioomissa kirjoitetaan neljän pisteen a, b, c, d välinen relaatioinstanssi muodossa $ab \equiv cd$ eikä rutiininomaisesti $\equiv(a, b, c, d)$.

Aksiooma (1)

$\forall a, b\ (ab \equiv ba)$

Janojen kongruenssiaksioomat

Selvyyden vuoksi seuraavissa aksioomissa kirjoitetaan neljän pisteen a, b, c, d välinen relaatioinstanssi muodossa $ab \equiv cd$ eikä rutiininomaisesti $\equiv(a, b, c, d)$.

Aksiooma (1)

$\forall a, b\ (ab \equiv ba)$

Aksiooma (2)

$\forall a, b, p, q, r, s\ (ab \equiv pq \wedge ab \equiv rs \rightarrow pq \equiv rs)$

Janojen kongruenssiaksioomat

Selvyyden vuoksi seuraavissa aksioomissa kirjoitetaan neljän pisteen a, b, c, d välinen relaatioinstanssi muodossa $ab \equiv cd$ eikä rutiininomaisesti $\equiv(a, b, c, d)$.

Aksiooma (1)

$\forall a, b\ (ab \equiv ba)$

Aksiooma (2)

$\forall a, b, p, q, r, s\ (ab \equiv pq \wedge ab \equiv rs \rightarrow pq \equiv rs)$

Aksiooma (3)

$\forall a, b, c\ (ab \equiv cc \rightarrow a = b)$

Janojen kongruenssiaksioomat

Selvyyden vuoksi seuraavissa aksioomissa kirjoitetaan neljän pisteen a, b, c, d välinen relaatioinstanssi muodossa $ab \equiv cd$ eikä rutiininomaisesti $\equiv(a, b, c, d)$.

Aksiooma (1)

$\forall a, b\ (ab \equiv ba)$

Aksiooma (2)

$\forall a, b, p, q, r, s\ (ab \equiv pq \wedge ab \equiv rs \rightarrow pq \equiv rs)$

Aksiooma (3)

$\forall a, b, c\ (ab \equiv cc \rightarrow a = b)$

Lause

Aksioomista 1–3 seuraa, että $\equiv$ on ekvivalenssirelaatio pisteparien joukossa E^2.

Janan konstruktio ja viiden janan aksiooma

Aksiooma (4)

$\forall a, b, c, d\, \exists x\, (bx \equiv cd \wedge B(a, b, x))$

Janan konstruktio ja viiden janan aksiooma

Aksiooma (4)

$\forall a, b, c, d\, \exists x\, (bx \equiv cd \wedge B(a, b, x))$

Aksiooma (5)

$$\begin{aligned}\forall a, b, c, d, a', b', c', d'\ (a \neq b \wedge B(a, b, c) \wedge B(a', b', c') \wedge \\ ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ad \equiv a'd' \wedge bd \equiv b'd' \\ \rightarrow cd \equiv c'd')\end{aligned}$$

Välissäoloaksioomat

Aksiooma (6, välissäolon surkastunut tapaus)

$\forall a, b \, (B(a, b, a) \to a = b)$

Aksiooma (7, välissäolon sisäinen transitiivisuus)

$\forall a, b, c, d \, (B(a, b, d) \wedge B(b, c, d) \to B(a, b, c))$

Aksiooma (8, välissäolon ulkoinen vertailullisuus)

$\forall a, b, c, d \, (B(a, b, c) \wedge B(a, b, d) \wedge a \neq b \to B(a, c, d) \vee B(a, d, c))$

Paschin aksiooma

Aksiooma (9)

$$\forall a, b, c, p, q \; \big(B(a,p,c) \wedge B(b,c,q) \to \exists x \; (B(a,x,b) \wedge B(q,p,x))\big)$$

Paschin aksiooma

Aksiooma (9)

$$\forall a, b, c, p, q \left(B(a, p, c) \wedge B(b, c, q) \rightarrow \exists x \left(B(a, x, b) \wedge B(q, p, x)\right)\right)$$

Tällä aksioomalla on merkillinen historia: Mortitz Pasch esitteli aksioomansa vuonna 1882 ja osoitti, ettei se seuraa muista Eukleideen aksioomista. Kreikkalaiset olivat pitäneet tätä aksioomaa niin ilmeisenä tosiasiana, että sitä oli epäsuorasti ja epähuomiossa saatettu käyttää todistuksissa, vaikka sitä ei ollut listattu aksioomaksi. Tämän seikan tekee vielä merkillisemmäksi se, että Eukleideen aksioomia oli tutkittu paljon juuri siinä mielessä, kuvaavatko ne geometriaa täydellisesti: kaikki nämä vuosituhannet oli pohdittu paralleeliaksiooman roolia geometrian aksioomissa ja paralleeliaksiooma oli paljastunut riippumattomaksi muista aksioomista jo 1820-luvulla Bolyain ja Lobatševski epäeuklidisten geometrioiden myötä.

Dimensiaksioomat tasossa

Aksiooma (10)

$\exists a, b, c\ (\neg B(a, b, c) \wedge \neg B(b, c, a) \wedge \neg B(c, a, b))$

Aksiooma (11)

$$\begin{gathered}\forall a, b, c, p_0, p_1\ ((p_0 \neq p_1 \wedge ap_0 \equiv ap_1 \wedge bp_0 \equiv bp_1 \wedge cp_0 \equiv cp_1) \\ \rightarrow B(a, b, c) \vee B(b, c, a) \vee B(c, a, b))\end{gathered}$$

Dimensioaksioomat tasossa

Aksiooma (10)

$\exists a, b, c\ (\neg B(a, b, c) \land \neg B(b, c, a) \land \neg B(c, a, b))$

Aksiooma (11)

$$\forall a, b, c, p_0, p_1\ ((p_0 \neq p_1 \land ap_0 \equiv ap_1 \land bp_0 \equiv bp_1 \land cp_0 \equiv cp_1) \\ \to B(a, b, c) \lor B(b, c, a) \lor B(c, a, b))$$

Ylläolevassa muodossa aksioomat toimivat tasossa. Jos halutaan aksiomatisoida yleisesti euklidista avaruutta, niin avaruuden $\mathbb{R}^n$ dimensio $n \geq 3$ vaikuttaa parametrina aksioomiin seuraavalla tavalla.

Dimensioaksioomat yleisesti

Aksiooma (10_n)

$$\exists a, b, c, p_1, \dots, p_{n-1} \Big(\bigwedge_{1 \le i < j \le n} p_i \neq p_j \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} ap_1 \equiv ap_k \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} bp_1 \equiv bp_k \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} cp_1 \equiv cp_k$$
$$\wedge \neg B(a, b, c) \wedge \neg B(b, c, a) \wedge \neg B(c, a, b) \Big)$$

Aksiooma (11_n)

$$\forall p_1, \dots, p_n \forall a, b, c \Big(\bigwedge_{1 \le i < j \le n} p_i \neq p_j \wedge \bigwedge_{k=2}^{n} ap_1 \equiv ap_k \wedge \bigwedge_{k=2}^{n} bp_1 \equiv bp_k \wedge \bigwedge_{k=2}^{n} cp_1 \equiv cp_k$$
$$\to B(a, b, c) \vee B(b, c, a) \vee B(c, a, b) \Big)$$

Eukleideen aksiooma

Aksiooma

$$
\begin{aligned}
&\forall a, b, c, d, t\ (B(a, d, t) \wedge B(b, d, c) \wedge a \neq b \\
&\qquad \rightarrow \exists x \exists y\ (B(a, b, x) \wedge B(a, c, y) \wedge B(y, t, x))
\end{aligned}
$$

Jatkumoaksioomaskeema

Epämuodollisella tasolla jatkumoaksioomaskeeman voi esittää seuraavasti: Olkoon a piste ja X, Y avaruuden (parametrein) määriteltäviä osajoukkoja. Oletetaan, että

$$\forall x \in X \forall y \in Y (B(a, x, y)).$$

Tällöin

$$\exists b \forall x \in X \forall y \in Y (B(x, b, y)).$$

Jatkumoaksioomaskeema

Epämuodollisella tasolla jatkumoaksioomaskeeman voi esittää seuraavasti: Olkoon a piste ja X, Y avaruuden (parametrein) määriteltäviä osajoukkoja. Oletetaan, että

$$\forall x \in X \forall y \in Y(B(a, x, y)).$$

Tällöin

$$\exists b \forall x \in X \forall y \in Y(B(x, b, y)).$$

Jatkumoaksioomaskeema siis kertoo, että jos joukot X ja Y sijaitsevat pisteestä a lähtevällä säteellä eli puolisuoralla niin, että joukko X tulee säteellä ensiksi, niin on olemassa piste b, joka on joukkojen X ja Y välissä.

Täsmällisessä muotoilussa joutuu selventämään, mitä tarkoittaa parametrein määritelty: Olkoon $\bar{t}$ paramatrijono. Joukkojen X ja Y *Parametrein määriteltävyys* tarkoittaa, että on olemassa kaavat $\alpha(x,\bar{t})$ ja $\beta(y,\bar{t})$, joille

$$X = \{\, x \in E \mid \alpha(x,\bar{t}) \,\},$$
$$Y = \{\, y \in E \mid \alpha(y,\bar{t}) \,\},$$

missä E on käsiteltävä geometrinen avaruus. Lisäksi α ja β ovat predikaattilogiikan kaavoja, ts. α ja β puhuvat pisteistä relaatioita B ja $\equiv$ käyttäen.
Jokaista määritelmäparia (α, β) kohti tarvitaan siis:

Täsmällisessä muotoilussa joutuu selventämään, mitä tarkoittaa parametrein määritelty: Olkoon $\overline{t}$ paramatrijono. Joukkojen X ja Y *Parametrein määriteltävyys* tarkoittaa, että on olemassa kaavat $\alpha(x, \overline{t})$ ja $\beta(y, \overline{t})$, joille

$$X = \{\, x \in E \mid \alpha(x, \overline{t}) \,\},$$
$$Y = \{\, y \in E \mid \alpha(y, \overline{t}) \,\},$$

missä E on käsiteltävä geometrinen avaruus. Lisäksi α ja β ovat predikaattilogiikan kaavoja, ts. α ja β puhuvat pisteistä relaatioita B ja $\equiv$ käyttäen.
Jokaista määritelmäparia (α, β) kohti tarvitaan siis:

Aksiooma ($13_{\alpha,\beta}$)

$$\forall \overline{t} \exists a \forall x \forall y (\alpha(x, \overline{t}) \wedge B(y, \overline{t}) \to B(a, x, y)$$
$$\to \exists b \forall x \forall y (\alpha(x, \overline{t}) \wedge \beta(y, \overline{t}) \to B(x, b, y)).$$

Tarskin aksioomajärjestelmä $\mathrm{EG}^{(n)}$

Yhteenvetona todetaakoon, että *Tarskin eukilidisen geometrian aksioomajärjestelmä* $\mathrm{EG}^{(n)}$ koostuu aksioomista 1.-12. ja jatkumoskeeman aksioomista, missä aksioomat 10_n ja 11_n riippuvat dimensiosta $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Lause (Euklidisen geometrian täydellisyyslause)

Olkoon $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Tarskin aksioomajärjestelmän $EG^{(n)}$ aksioomat ovat tosia standardimallissa $(\mathbb{R}^n, B, \equiv)$. Toisaalta jokainen ensimmäisen kertaluvun väittämä, joka on totta tässä standardimallissa, on todistettavissa näistä aksioomista.

Aksioomat standardimallissa

Tällä kurssilla ei ole käytettävissä riittävästi menetelmiä todistaa kokonaisuudessaan edellistä lausetta, mutta sen ensimmäinen väittämän tarkastaminen ei ole mahdotonta, ks. seuraavaa taulukkoa.

Aksiooma	läpikäyntitapa
1–3	luennoilla aksioomien yhteydessä
4	harj. 7.2.
5	harj. 12.5.
6–8	harj. 4.3–5
9	seuraavaksi
10–11	?
12	harj. 13
13	seuraavaksi

Lause

Paschin aksiooma on tosi standardimallissa.

Lause

Jatkumoaksioomaskeema on tosi standardimallissa.

Geometristen olioiden kuvailu Tarskin järjestelmässä

Useiden geometristen olioiden kuvailu on helppoa Tarskin järjestelmässä. *Kahden pisteen a ja b välinen jana $[a, b]$* on niiden pisteiden x joukko, joille pätee $B(a, x, b)$. Tässä määritelmässä siis edellytetään, että pisteitä todella on kaksi eli $a \neq b$. Yksiöitä kutsutaan myös *surkastuneiksi janoiksi*. Eri pisteiden a ja b kautta kulkeva *suora* $\ell(a, b)$ on niiden pisteiden x joukko, joille pätee $B(x, a, b)$, $B(a, x, b)$ tai $B(a, b, x)$.

Geometristen olioiden kuvailu Tarskin järjestelmässä

Useiden geometristen olioiden kuvailu on helppoa Tarskin järjestelmässä. *Kahden pisteen a ja b välinen jana $[a, b]$* on niiden pisteiden x joukko, joille pätee $B(a, x, b)$. Tässä määritelmässä siis edellytetään, että pisteitä todella on kaksi eli $a \neq b$. Yksiöitä kutsutaan myös *surkastuneiksi janoiksi*. Eri pisteiden a ja b kautta kulkeva *suora* $\ell(a, b)$ on niiden pisteiden x joukko, joille pätee $B(x, a, b)$, $B(a, x, b)$ tai $B(a, b, x)$.
Monikulmiolla tarkoitetaan janojen yhdistettä

$$S = \bigcup_{i=n-1}^{i=0} [a_i, a_{i+1}],$$

missä a_i, $i = 0, \ldots, a_{n-1}$ ovat eri pisteitä ja $a_n = a_0$. Pisteitä $a_0, \ldots, a_{n-1}$ kutsutaan monikulmion S *kärjiksi* ja janoja $[a_i, a_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ *sivuiksi*. Monikulmio S on *yksinkertainen*, jos kaikilla $i = 1, \ldots n-1$ pätee $[a_{i-1}, a_i] \cap [a_i, a_{i+1}] = \{a_i\}$ ja $[a_{n-1}, a_0] \cap [a_0, a_1] = \{a_0\}$ ja muuten sivut eivät leikkaa toisiaan.

Tason määritelmään vaikuttaa aksioomajärjestelmän dimensio n. $\mathrm{EG}^{(2)}$:ssa *taso* on yksinkertaisesti kaikkien pisteiden joukko. Kun $n > 2$, niin $\mathrm{EG}^{(n)}$:ssä tason määrittely on monimutkaisempaan. Olkoot a, b ja c pisteitä, jotka eivät sijaitse samalla suoralla. Näiden pisteiden määrittämä *taso* E koostuu niistä pisteistä x, että on olemassa piste y, joka sijaitsee jollakin suorista $\ell(a, b)$, $\ell(a, c)$ tai $\ell(b, c)$ ja jolle x on jollakin suorista $\ell(a, y)$, $\ell(b, y)$ tai $\ell(c, y)$, missä on oletettava, että $a \neq y$, $b \neq y$ tai $c \neq y$ sen mukaan, mitä suorista tarkoitetaan.

Tason määritelmään vaikuttaa aksioomajärjestelmän dimensio n. $\mathrm{EG}^{(2)}$:ssa *taso* on yksinkertaisesti kaikkien pisteiden joukko. Kun $n > 2$, niin $\mathrm{EG}^{(n)}$:ssä tason määrittely on monimutkaisempaan. Olkoot a, b ja c pisteitä, jotka eivät sijaitse samalla suoralla. Näiden pisteiden määrittämä *taso* E koostuu niistä pisteistä x, että on olemassa piste y, joka sijaitsee jollakin suorista $\ell(a,b)$, $\ell(a,c)$ tai $\ell(b,c)$ ja jolle x on jollakin suorista $\ell(a,y)$, $\ell(b,y)$ tai $\ell(c,y)$, missä on oletettava, että $a \neq y$, $b \neq y$ tai $c \neq y$ sen mukaan, mitä suorista tarkoitetaan.
Ympyrän Y määrittävät ympyrän *keskipiste* a, jokin ympyrän kehän pisteistä $b \neq a$ sekä jokin taso E, jossa molemmat pisteet sijaitsevat:

$$Y = \{\, x \in E \mid ax \equiv ab \,\}.$$

Vertailu suoralla

Välissäolorelaatio on oikeastaan kiinnostava vain, jos käsitellään kolmea eri pistettä.

Lemma

Avaruuden kahdelle eri pisteelle a ja b pätee aina $B(a,a,a)$, $B(b,a,a)$, $\neg B(a,b,a)$ ja $B(a,a,b)$.

Vertailu suoralla

Välissäolorelaatio on oikeastaan kiinnostava vain, jos käsitellään kolmea eri pistettä.

Lemma

Avaruuden kahdelle eri pisteelle a ja b pätee aina $B(a, a, a)$, $B(b, a, a)$, $\neg B(a, b, a)$ *ja* $B(a, a, b)$.

Lause (Välissäolorelaation symmetrisyys)

$\forall a, b, c\ (B(a, b, c) \to B(c, b, a))$

Kolme pistettä a, b ja c voidaan järjestää jonoksi 6 tavalla, joten a priori olisi $2^6 = 64$ mahdollisuutta, miten välissäolorelaatio niiden välillä rakentuu. Kuitenkin symmetria rajaa mahdollisuudet $2^3 = 8$ tapaukseen. Seuraava lemma rajoittaa tapauksia edelleen.

Lemma

Jos $B(a, b, c)$ *ja* $B(b, c, a)$, *niin* $b = c$.

Lause

Olkoot a, b ja c avaruuden E eri pisteitä. Tällöin korkeintaan yksi ehdoista $B(a, b, c)$, $B(c, a, b)$ ja $B(b, c, a)$ pätee.

Lause

Olkoot a, b ja c avaruuden E eri pisteitä. Tällöin korkeintaan yksi ehdoista $B(a,b,c)$, $B(c,a,b)$ ja $B(b,c,a)$ pätee.

Lause (Sisäinen vertailullisuus)

Jos c ja d ovat molemmat janalla $[a,b]$, niin $B(a,c,d)$ tai $B(a,d,c)$.

Lause

Olkoot a, b ja c avaruuden E eri pisteitä. Tällöin korkeintaan yksi ehdoista $B(a, b, c)$, $B(c, a, b)$ ja $B(b, c, a)$ pätee.

Lause (Sisäinen vertailullisuus)

Jos c ja d ovat molemmat janalla $[a, b]$, niin $B(a, c, d)$ tai $B(a, d, c)$.

Määritelmä

Pisteestä a lähtevä, eri pisteen b kautta kulkeva *puolisuora* koostuu pisteistä x, joille $B(a, x, b)$ tai $B(a, b, x)$.

Lemma

Olkoot a ja b eri pisteitä sekä c ja d pisteiden a ja b määräämällä suoralla. Tällöin $B(a, c, d)$, $B(c, d, a)$ tai $B(d, a, c)$.

Suoran määrävät sen kaksi pistettä

Lemma

Olkoon piste c suoralla $\ell(a, b)$. Oletetaan, että $c \neq a$ ja $c \neq b$. Tällöin $\ell(a, b) = \ell(a, c)$.

Suoran määrävät sen kaksi pistettä

Lemma

Olkoon piste c suoralla $\ell(a, b)$. Oletetaan, että $c \neq a$ ja $c \neq b$. Tällöin $\ell(a, b) = \ell(a, c)$.

Lause

Olkoot c ja d eri pisteitä suoralla ℓ. Tällöin $\ell = \ell(c, d)$.

Suoran määrävät sen kaksi pistettä

Lemma

Olkoon piste c suoralla $\ell(a,b)$. Oletetaan, että $c \neq a$ ja $c \neq b$. Tällöin $\ell(a,b) = \ell(a,c)$.

Lause

Olkoot c ja d eri pisteitä suoralla ℓ. Tällöin $\ell = \ell(c,d)$.

Seuraus

Oletetaan, että suorat ℓ ja ℓ' leikkaavat kahdessa pisteessä. Tällöin $\ell = \ell'$.

Järjestys suoralla

Lause

Olkoon S pisteestä a lähtevä pisteen b kautta kulkeva puolisuora. Määritellään puolisuoralle S pisteiden x ja y välinen relaatio $\leq$ seuraavasti:

$$x \leq y, \text{ jos ja vain jos } B(a, x, y).$$

Tällöin $\leq$ on joukon S lineaarijärjestys. Lisäksi kaikilla $x, z \in S$ ja $y \in E$ pätee, että

$$B(x, y, z), \text{ jos ja vain jos } x \leq y \leq z \vee z \leq y \leq x.$$

Järjestys suoralla

Lause

Olkoon S pisteestä a lähtevä pisteen b kautta kulkeva puolisuora. Määritellään puolisuoralle S pisteiden x ja y välinen relaatio $\leq$ seuraavasti:

$$x \leq y, \text{ jos ja vain jos } B(a, x, y).$$

Tällöin $\leq$ on joukon S lineaarijärjestys. Lisäksi kaikilla $x, z \in S$ ja $y \in E$ pätee, että

$$B(x, y, z), \text{ jos ja vain jos } x \leq y \leq z \vee z \leq y \leq x.$$

Lemma

Piste a jakaa pisteiden a ja b $(a \neq b)$ kautta kulkevan suoran kahdeksi puolisuoraksi, joilla on yhteisenä pisteenä vain alkupiste a.

Lause

Jokaisessa suorassa l voidaan määritellä sellainen lineaarijärjestys $\leq$, että kaikille $x, y, z \in l$ pätee

$$B(x, y, z) \Leftrightarrow x \leq y \leq z \vee z \leq y \leq x.$$

Ylläolevan kaltaista lineaarijärjestystä $\leq$ kutsutaan suoran l *suunnistukseksi*.

Lause

Jokaisessa suorassa l voidaan määritellä sellainen lineaarijärjestys $\leq$, että kaikille $x, y, z \in l$ pätee

$$B(x, y, z) \Leftrightarrow x \leq y \leq z \vee z \leq y \leq x.$$

Ylläolevan kaltaista lineaarijärjestystä $\leq$ kutsutaan suoran l *suunnistukseksi*.

Seuraus

Tasossa minkä tahansa suoran ulkopuolella on piste.

Lause

Olkoon l suora ja $\leq$ sen suunnistus. Tällöin $\leq$ on tiheä, ts. jos $x, y \in l$, $x < y$, niin on olemassa z, jolle $x < z < y$.

Aritmetiikkaa suoralla

Lemma (Janan konstruktion yksikäsitteisyys)

Kaikilla pisteillä a, b, c, q on olemassa yksikäsitteinen x, jolle $B(q, a, x)$ ja $ax \equiv bc$.

Lause

Olkoon l suora ja $\leq$ sen suunnistus. Tällöin suora l voidaan varustaa sellaisella yhteenlaskulla $+$, että

1. $(l, +, \leq)$ *on järjestetty Abelin ryhmä, ts. Abelin ryhmä, jolle*
$$x \leq y \Rightarrow x + t \leq y + t,$$
kun $x, y, t \in l$.
2. *kaikilla $x, y, x', y' \in l$ pätee: $\exists t \in l : (x' = x + t \wedge y' = y + t) \Rightarrow xy \equiv x'y'$.*

Lause ($EG^{(n)}$)

Jokaisella janalla ab on keskipiste, ts. on olemassa sellainen c, että $B(a, c, b)$ *ja* $ac \equiv cb$.

Kartioleikkaukset

Ellipsi

Kartioleikkauksia ovat ympyrä, ellipsi, paraabeli ja hyperbeli, jotka pystytään muodostamaan suoran ympyräkartion ja tason leikkauksina $\mathbb{R}^3$:ssa.

Määritelmä

Ellipsillä tarkoitetaan niiden tason pisteiden uraa (eli joukkoa), joille etäisyyksien summa kiinteistä pisteistä $\mathbf{p}$ ja $\mathbf{q}$ on näiden pisteiden keskinäistä etäisyyttä suurempi vakio, ts. joukko E on ellipsi, jos on olemassa sellaiset $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ ja vakio $c > |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$, että

$$E = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x} - \mathbf{p}| + |\mathbf{x} - \mathbf{q}| = c \,\}.$$

Pisteitä $\mathbf{p}$ ja $\mathbf{q}$ kutsutaan ellipsin E *polttopisteiksi*.

Ellipsi

Kartioleikkauksia ovat ympyrä, ellipsi, paraabeli ja hyperbeli, jotka pystytään muodostamaan suoran ympyräkartion ja tason leikkauksina $\mathbb{R}^3$:ssa.

Määritelmä

Ellipsillä tarkoitetaan niiden tason pisteiden uraa (eli joukkoa), joille etäisyyksien summa kiinteistä pisteistä $\mathbf{p}$ ja $\mathbf{q}$ on näiden pisteiden keskinäistä etäisyyttä suurempi vakio, ts. joukko E on ellipsi, jos on olemassa sellaiset $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ ja vakio $c > |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$, että

$$E = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x} - \mathbf{p}| + |\mathbf{x} - \mathbf{q}| = c \,\}.$$

Pisteitä $\mathbf{p}$ ja $\mathbf{q}$ kutsutaan ellipsin E *polttopisteiksi*.

Erikoistapauksessa $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ saadaan tulokseksi ympyrä $E = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 2\,|\mathbf{x} - \mathbf{p}| = c \,\} = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x} - \mathbf{p}| = c/2 \,\}$. Sen sijaan määritelmä rajaa pois mahdollisuuden $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ ja $c = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$, jolloin joukon E voidaan osoittaa surkastuvan janaksi.

Lause

Olkoon $E \subseteq \mathbb{R}^2$ *ellipsi, jonka polttopisteet sijaitsevat* x*-akselilla symmetrisesti origon suhteen. Tällöin joillakin* $a, b > 0$ *pätee*

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Lause

Olkoon $E \subseteq \mathbb{R}^2$ ellipsi, jonka polttopisteet sijaitsevat x-akselilla symmetrisesti origon suhteen. Tällöin joillakin $a, b > 0$ pätee

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Huomautus

Janoja origosta pisteisiin $(a, 0)$ ja $(0, b)$ kutsutaan ellipsin *puoliakseleiksi*. Puoliakselit voitaisiin tietenkin määritellä myös ellipseille, joiden polttopisteet eivät sijaitse symmetrisesti x-akselilla.

Ei ole vaikeata osoittaa, että mielivaltaisella ellipsillä on symmetriakeskipiste, joka on polttopisteiden yhdysjanan keskipiste. Ellipsien symmetriaryhmät ovat isomorfisia, jos ellipsit eivät ole ympyröitä.

Paraabeli

Määritelmä

Tasokuvio on *paraabeli*, jos se on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä kaukana kiinteästä pisteestä $\mathbf{p}$ ja kiinteästä suorasta ℓ, missä oletetaan, että $\mathbf{p} \notin \ell$. Pistettä $\mathbf{p}$ kutsutaan *polttopisteeksi* ja suoraa ℓ *johtosuoraksi*.

Lause

Jos paraabelin P johtosuora on x-akselin suuntainen, niin jollakin $a, b, c, a \neq 0$, pätee

$$P = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bx + c = y \}.$$

Hyperbeli

Määritelmä

Olkoon $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ kaksi tason $\mathbb{R}^2$ pistettä ja $0 < d < |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$. *Polttopisteiden* $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ sekä *erotusparametrin* d määräämä *hyperbeli* on

$$H := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \big| |\mathbf{x} - \mathbf{a}| - |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \big| = d \right\}.$$

Ympyräkartio

Määritelmä

Suora kaksivaippainen ympyräkartio on $\mathbb{R}^3$:n osajoukko K, jonka määräävät *huippu* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, huipun kautta kulkeva suora l ja suhde $k > 1$. Kartio K koostuu niistä pisteistä, joilla etäisyyksien suhde huipusta $\mathbf{p}$ ja suorasta l on vakio k.

Ympyräkartio

Määritelmä

Suora kaksivaippainen ympyräkartio on $\mathbb{R}^3$:n osajoukko K, jonka määräävät *huippu* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, huipun kautta kulkeva suora l ja suhde $k > 1$. Kartio K koostuu niistä pisteistä, joilla etäisyyksien suhde huipusta $\mathbf{p}$ ja suorasta l on vakio k.

Lause

Suoran kaksiosaisen ympyräkartion K yhtälö on 2. asteen polynomiyhtälö muuttujien x_0, x_1 ja x_2 suhteen, kun $(x_0, x_1, x_2) \in K$.

Kartioleikkaus

Lause

Kun suoraa kaksivaippaista ympyräkartiota leikataan xy-tasolla, niin saadaan kartioleikkaus, jonka yhtälö on toisen asteen muotoa muuttujien x_0 ja x_1 suhteen, ts. jos S on tämä kartioleikkaus, niin

$$S = \{ (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x_0, x_1) = 0 \},$$

missä f on toisen asteen polynomi.

Muodot

Määritelmä

Polynomikuvaus $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on *k:nnen asteen muoto* ($k, n \in \mathbb{Z}_+$), jos kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ pätee $p(t\mathbf{x}) = t^k p(\mathbf{x})$. Toisen asteen muotoa kutsutaan *neliömuodoksi*.

Muodot

Määritelmä

Polynomikuvaus $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on *k:nnen asteen muoto* ($k, n \in \mathbb{Z}_+$), jos kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ pätee $p(t\mathbf{x}) = t^k p(\mathbf{x})$. Toisen asteen muotoa kutsutaan *neliömuodoksi*.

Lemma

Polynomikuvaus $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on neliömuoto, jos ja vain jos joillakin kertoimilla $a, b, c \in \mathbb{R}$ pätee, että

$$p(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2,$$

kun $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$.

Definiittiys

Määritelmä

Neliömuoto $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on *indefiniitti*, jos se saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Jos p ei ole indefiniitti ja $p(\mathbf{x}) \neq 0$, kun $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, niin p on *definiitti*. Jos p ei ole indefiniitti eikä definiitti, niin se on *semidefiniitti*.

Definiittiys

Määritelmä

Neliömuoto $p \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on *indefiniitti*, jos se saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Jos p ei ole indefiniitti ja $p(\mathbf{x}) \neq 0$, kun $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, niin p on *definiitti*. Jos p ei ole indefiniitti eikä definiitti, niin se on *semidefiniitti*.

Lause

Neliömuoto $p \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, p(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2$, *on*

1. *indefiniitti, jos* $b^2 - 4ac > 0$,
2. *semidefiniitti, jos* $b^2 - 4ac = 0$ *ja*
3. *definiitti, jos* $b^2 - 4ac < 0$.

Kuvioiden yhtenevyys

Määritelmä

Olkoot $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$. Tasokuviot A ja B ovat *yhtenevät*, $A \cong B$, jos on olemassa yhtenevyyskuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle $B = f[A]$.

Lause

Olkoon $C := g^{-1}\{0\}$ *toisen asteen käyrä, missä*

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + dx_0 + ex_1 + f.$$

Merkitään p:llä vastaavaa neliömuotoa

$$p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ p(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2.$$

Jos p *on definiitti tai indefiniitti, niin* $C \cong p^{-1}\{\gamma\}$ *jollakin vakiolla* $\gamma \in \mathbb{R}$.

Kuvioiden yhtenevyys

Määritelmä

Olkoot $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$. Tasokuviot A ja B ovat *yhtenevät*, $A \cong B$, jos on olemassa yhtenevyyskuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle $B = f[A]$.

Lause

Olkoon $C := g^{-1}\{0\}$ *toisen asteen käyrä, missä*

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + dx_0 + ex_1 + f.$$

Merkitään p:llä vastaavaa neliömuotoa

$$p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ p(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2.$$

Jos p *on definiitti tai indefiniitti, niin* $C \cong p^{-1}\{\gamma\}$ *jollakin vakiolla* $\gamma \in \mathbb{R}$.

Definiittiys ja kartioleikkauksen tyyppi

Fakta

Symmetrisellä $n \times n$-matriisilla on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

Fakta

Symmetrisen $n \times n$-reaalimatriisin ominaisarvot ovat reaalisia. Sen eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat keskenään kohtisuorassa.

Definiittiys ja kartioleikkauksen tyyppi

Fakta

Symmetrisellä $n \times n$-matriisilla on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

Fakta

Symmetrisen $n \times n$-reaalimatriisin ominaisarvot ovat reaalisia. Sen eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat keskenään kohtisuorassa.

Lause

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ toisen asteen polynomifunktio, jota vastaava neliömuoto on definiitti. Tällöin jokaisella $\gamma \in \mathbb{R}$ tasa-arvokäyrä $f^{-1}\{\gamma\}$ on joko ellipsi tai piste tahi tyhjä joukko.

Lause

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *toisen asteen polynomifunktiot, jota vastaava neliömuoto on indefiniitti. Tällöin jokaisella* $\gamma \in \mathbb{R}$ *tasa-arvokäyrä* $f^{-1}\{\gamma\}$ *on joko hyperbeli tai toisiaan leikkaava suorapari.*

Lause

Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *toisen asteen polynomifunktiot, jota vastaava neliömuoto on semidefiniitti. Tällöin jokaisella* $\gamma \in \mathbb{R}$ *tasa-arvokäyrä* $f^{-1}\{\gamma\}$ *on joko paraabeli tai suora tai yhdensuuntaisista suorista koostuva suorapari tahi tyhjä joukko.*