Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö

Kevät 2013

Geometria

Luennot: **Kerkko Luosto**
Muistiinpanot: **Jesse Railo**

TeX-ninen johdanto

Tampereen yliopiston matematiikan kurssin Geometria luennoi keväällä 2013 Kerkko Luosto. Luennoista piti kirjaa Jesse Railo, joka latoi muistiinpanonsa LaTeX:lla, mikä kiitoksin tunnustetaan. Tämä käsikirjoitus on muodostunut hänen muistiinpanojensa ja luennoitsijan muokkausten pohjalta. Tuntuu tarpeelliselta jaella muistiinpajoja mahdollisimman nopeasti verkossa, joten tässä versiossa 0 on väistämättä vielä jäljellä virheellisyyksiä ja puutteita, joista luennoija on yksinomaan vastuussa. Tämän TeX-nisen johdannon, joka myöhemmin korvaantuu tavanomaisella johdannolla, tarkoituksena on kirjata tunnetut ongelmat.

Luennoista tulee toivon mukaan tarjolle useita korjausversioita, jotka on tarkoitus vaiheistaa seuraavasti:

Vaihe 0: Materiaali on siistitty teknisesti, esityksen rakennetta on järjestelty sekä välttämättömät korjaukset ja täydennykset on tehty.

Vaihe 1: Esitykseen lisätään johdanto ja muuta selittävää tekstiä sekä kirjallisuusluettelo. Todistuksia täydennetään.

Vaihe 2: Geometrian esitykset kaipaavat tietenkin tuekseen kuvia, joiden piirtäminen aiemmissa versioissa on jäänyt lukijan vastuulle. Tähän versioon on tarkoitus lisätä kuvat ja kaaviot, joita yhteensä tarvittaneen ainakin parikymmentä.

Vaihe 3: Tässä vaiheessa lisätään Tarskin–Banachin paradoksi.

Vaihe 4: Mahdolliset sisältöparannukset on tarkoitus jättää korjausversioissa viimeiseen vaiheeseen. Käsikirjoitus noudattaa hyvässä ja pahassa luentojen sisältöjä ja esitysjärjestystä, mutta materiaalin muokkaaminen on aikaa vievää työtä.

On hyvin mahdollista, että viimeiset vaiheet toteutetaan vasta seuraavan luentokerran yhteydessä.

Sisältö

1 Tarskin aksiomaattinen geometria

Taso tarkoittaa joukkoa $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Tasogeometria on kokoelma tasoa koskevia tuloksia. Oliot (Eukleides, Hilbert): pisteet ja suorat. Oliot (Tarski): pisteet. Otetaan käyttöön seuraavat merkinnät. Merkitään symbolilla B *välissäolorelaatiota*, jolle

$$B(x, y, z) : \text{"}y \text{ on } x\text{:n ja } z\text{:n kulkevalla suoralla"}.$$

Merkitään symbolilla $\equiv$ *janojen samanpituisuutta*, jolle

$$\equiv (x, y, z, t) : \text{"jana } xy \text{ on yhtä pitkä kuin } zt\text{"}.$$

Huomautus 1.1. Relaatiota $\equiv (x, y, z, t)$ merkitään yleensä $xy \equiv zt$.

Kartesiolaisessa mielessä *standardimalli euklidiselle n-ulotteiselle geometrialle* on $(E, B, \equiv)$, missä $E = \mathbb{R}^n$,

$$B = \{\, (x, y, z) \in E^3 \mid \exists \lambda \in [0, 1] : y = \lambda x + (1 - \lambda) z \,\}$$

ja kaikilla $x, y, z, t \in E$ pätee, että

$$\equiv (x, y, z, t) \Leftrightarrow |x - y| = |z - t| \,.$$

Huomaa, että

$$|a - b| := \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (a_i - b_i)^2},$$

missä $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Tarskin geometrian aksioomissa on yhteensä 12 aksioomaa ja 1 aksioomaskeema (kullekin dimensiolle omat). Seuraavaksi esitetään nämä aksioomat ja ajatellaan usein, että pisteet kuuluvat johonkin perusjoukkoon E. Yleensä valitsemme $E = \mathbb{R}^n$, jollakin $n \in \mathbb{Z}_+$. Yleisohjeena kannattaa hahmotella aksioomien merkitys tasolle, jolloin niiden oleellisen sisällön pystyy ymmärtämään intuitiivisesti. Varoituksena voisi mainita, että geometriseen intuitioon ei voi kuitenkaan täysin luottaa, kun tekee todistuksia vaan käytetyt säännöt on ensiksi pystyttävä johtamaan näistä aksioomista.

1.1 Tarskin aksioomat

Janojen kongruenssiaksioomat

Aksiooma 1. $\forall a, b\ (ab \equiv ba)$

Aksiooma 2. $\forall a, b, p, q, r, s\ (ab \equiv pq \wedge ab \equiv rs \rightarrow pq \equiv rs)$

Aksiooma 3. $\forall a, b, c\ (ab \equiv cc \rightarrow a = b)$

Luennoilla johdettiin näistä aksioomista, että janojen samanpituisuus on ekivalenssirelaatio pisteparien E^2 joukossa.

Janan konstruktio

Aksiooma 4. $\forall a, b, c, d\, \exists x\ (bx \equiv cd \wedge B(a, b, x))$

Janan konstruktioaksiooma kertoo, että jos annettuna on jotkin janat ab ja cd, niin tällöin voimme löytää janan ab suuntaiselta suoralta sellaisen pisteen x, että jana bx on yhtä pitkä kuin jana cd ja piste x on kauempana pisteestä a kuin piste b.

Viiden janan aksiooma

Aksiooma 5.

$$\begin{aligned}\forall a, b, c, d, a', b', c', d'\ (a \neq b \wedge B(a, b, c) \wedge B(a', b', c') \wedge \\ ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ad \equiv a'd' \wedge bd \equiv b'd' \\ \rightarrow cd \equiv c'd')\end{aligned}$$

Oletukset sanovat, että meillä on kolmiot abc ja $a'b'c'$, joiden sivujen pituudet ovat samat. Jos lisäksi meillä on vielä pisteet c (c'), jotka sijaitsevat janojen ab (ab') suuntaisilla suorilla samalla etäisyydellä pisteestä b (b'), niin tällöin suorat cd ja $c'd'$ ovat samanmittaisia.

Välissäoloaksioomat

Aksiooma 6. $\forall a, b\ (B(a, b, a) \rightarrow a = b)$

Aksiooma 7. $\forall a, b, c, d(B(a, b, d) \wedge B(b, c, d) \rightarrow B(a, b, c))$

Aksiooma 8. $\forall a, b, c, d(B(a, b, c) \wedge B(a, b, d) \wedge a \neq c \rightarrow B(a, c, d) \vee B(a, d, c)$

Aksiooma 11 sanoo, että jos b on pisteiden a ja d välissä ja c on pisteiden b ja d välissä, niin tällöin piste b on myös pisteiden a ja c välissä. Tämä tuntuu varsin luonnolliselta.

Huomautus 1.2. Luennoilla aksioomat esitettiin eri järjestyksessä kuin tässä.

Paschin aksiooma

Aksiooma 9. $\forall a, b, c, p, q\ (B(a, p, c) \wedge B(b, c, q) \rightarrow \exists x\ (B(a, x, b) \wedge B(q, p, x)))$

Aksiooma ilmaisee sen, että jos suora menee kolmion sivun läpi, niin se tulee ulos jommastakummasta toisista sivuista ulos ($\mathbb{R}^2$). Toisaalta isommissa dimensioissa oletukset lukitsevat tarkasteltava tason, jossa vastaava tulos pätee.

On syytä huomata, että edelliset aksioomat voivat olla voimassa mielivaltaisessa joukossa E, kunhan vain $\equiv$ ja B on määritelty sopivasti. Seuraavat aksioomat ovat kuitenkin riippuvaisia tarkasteltavan *euklidisen avaruuden* dimensiosta.

Dimensioaksioomat tasossa

Aksiooma 10 (n=2). $\exists a, b, c\ (\neg B(a, b, c) \wedge \neg B(b, c, a) \wedge \neg B(c, a, b))$

Aksiooma 11 (n=2).

$$\begin{aligned}\forall a, b, c, p_0, p_1\ \big((p_0 \neq p_1 \wedge ap_0 \equiv ap_1 \wedge bp_0 \equiv bp_1 \wedge cp_0 \equiv cp_1) \\ \rightarrow B(a, b, c) \vee B(b, c, a) \vee B(c, a, b)\big)\end{aligned}$$

Aksiooma 8 sanoo seuraavaa: On olemassa kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla. Aksiooma 9 taas: Sellaiset pisteet, joista on sama etäisyys molempiin ns. *parametripisteisiin* p_0 ja p_1, ovat samalla suoralla.

Dimensioaksioomat yleisesti

Aksiooma 10 ($n = 1$). $\exists a, b\ (a \neq b)$

Aksiooma 10 ($n \geq 3$).

$$\begin{aligned}\exists a, b, c, p_1, \ldots, p_{n-1}\ \Big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} p_i \neq p_j \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} ap_1 \equiv cp_k \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} bp_1 \equiv bp_k \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} cp_1 \equiv cp_k \\ \wedge \neg B(a, b, c) \wedge \neg B(b, c, a) \wedge \neg B(c, a, b)\Big)\end{aligned}$$

Aksiooma 11 ($n = 1$). Ei esitetty luennoilla.

Aksiooma 11 ($n \geq 3$).

$$\begin{aligned}\forall p_1, \ldots, p_n \forall a, b, c\ \Big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} p_i \neq p_j \wedge \bigwedge_{k=2}^{n} ap_1 \equiv cp_k \wedge \bigwedge_{k=2}^{n} bp_1 \equiv bp_k \wedge \bigwedge_{k=2}^{n} cp_1 \equiv cp_k \\ \rightarrow B(a, b, c) \vee B(b, c, a) \vee B(c, a, b)\Big)\end{aligned}$$

Eukleideen aksiooma

Aksiooma 12.

$$\begin{aligned}&\forall a,b,c,d,t\ (B(a,d,t)\wedge B(b,d,c)\wedge a\neq b\\&\qquad\rightarrow \exists x\exists y\ (B(a,b,x)\wedge B(a,c,y)\wedge B(y,t,x))\end{aligned}$$

Aksioomaa kannattaa luonnostella piirtämällä kuva tasoon pisteistä a, b, c, d ja t. Tämän jälkeen pohtia, mitä aksiooma sanoo pisteistä x ja y.

Jatkumoaksioskeema

Jatkumoaksioomaskeema. Olkoon a piste ja X, Y avaruuden (parametrein) määriteltäviä osajoukkoja. Oletetaan, että

$$\forall x\in X\forall y\in Y(B(a,x,y)).$$

Tällöin

$$\exists b\forall x\in X\forall y\in Y(B(x,b,y)).$$

Tarkemmin tämä merkitsee seuraavaa: Olkoon $\overline{t}$ paramatrijono. Joukkojen X ja Y *Parametrein määriteltävyys* tarkoittaa, että on olemassa kaavat $\alpha(x,\overline{t})$ ja $\beta(y,\overline{t})$, joille

$$\begin{aligned}X&=\{\,x\in E\mid \alpha(x,\overline{t})\,\},\\Y&=\{\,y\in E\mid \alpha(y,\overline{t})\,\},\end{aligned}$$

missä E on käsiteltävä geometrinen avaruus. Lisäksi α ja β ovat ensimmäisen kertaluvun kaavoja, ts. α ja β puhuvat pisteistä relaatioita B ja $\equiv$ käyttäen.

Jokaista määritelmäparia (α,β) kohti tarvitaan siis:

Jatkumoaksiooma.

$$\begin{aligned}&\forall\overline{t}\exists a\forall x\forall y(\alpha(x,\overline{t})\wedge B(y,\overline{t})\rightarrow B(a,x,y)\\&\rightarrow\exists b\forall x\forall y(\alpha(x,\overline{t})\wedge\beta(y,\overline{t})\rightarrow B(x,b,y)).\end{aligned}$$

Tarskin eukilidisen geometrian aksioomajärjestelmä $EG^{(n)}$ koostuu aksioomista 1.-12. ja jatkumoskeemasta sekä riippuu dimensiosta $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

Seuraavaksi esitetään (ilman todistusta) tärkeä lause liittyen Tarskin aksioomiin ja analyyttiseen geometriaan.

Lause 1.3 (Euklidisen geometrian täydellisyyslause). *Olkoon $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Tarskin aksioomajärjestelmän $EG^{(n)}$ aksioomat ovat tosia standardimallissa $(E, B, \equiv)$, missä $E=\mathbb{R}^n$,*

$$B=\{\,(x,y,z)\in E^3\mid \exists\lambda\in[0,1]:y=\lambda x+(1-\lambda)z\,\}$$

ja kaikilla $x,y,z,t\in E$:

$$xy\equiv zt\Leftrightarrow |x-y|=|z-t|\,.$$

Jokainen ensimmäisen kertaluvun väittämä, joka on totta standardimallissa, on todistettavissa näistä aksioomista.

1.2 Todistuksia standardimallissa

Aksioomat 1–3 todistettiin luennoilla ja osaa aksioomien todistuksista on käsitelty harjoituksissa.

Terminologiaa:

Piste x on pisteiden $x_0, \dots, x_{m-1}$ *lineaarikombinaatio*, jos on olemassa sellaiset kertoimet $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1} \in \mathbb{R}$, että

$$x = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i x_i.$$

Tällöin x on *affiini kombinaatio*, jos kertoimet voidaan lisäksi valita niin, että

$$\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i = 1,$$

ja jos lisäksi $\lambda_i \in [0, 1]$, kun $i = 0, \dots, m-1$, niin x on *konveksi kombinaatio*.

Lause 1.4. *Paschin aksiooma on tosi standardimallissa.*

Todistus. Jos $b = c$, niin voidaan valita $x = q$. Jos $q = c$, niin valitaan $x = b$. Oletetaan, että $q \neq c$ ja $b \neq c$. Koska c on pisteiden b ja p välissä, niin jollakin $\lambda \in [0, 1]$,

$$c = \lambda b + (1 - \lambda)p.$$

Koska $b \neq c$, niin $\lambda \neq 1$ ja voidaan ratkaista

$$p = \frac{c - \lambda b}{1 - \lambda}.$$

Vastaavasti jollakin $\mu \in [0, 1]$ pätee

$$q = \mu a + (1 - \mu)c.$$

Suoran pq pisteet ovat muotoa

$$x = p + \nu(q - p) = \nu q + (1 - \nu)p,$$

jollakin $\nu \in \mathbb{R}$. Sijoittamalla tähän edellä esitetyt lausekkeet p:lle ja q:lle saadaan

$$\begin{aligned} x &= \nu(\mu a + (1 - \mu)c) + (1 - \nu)\frac{c - \lambda b}{1 - \lambda} \\ &= \mu \nu a - \frac{1 - \nu}{1 - \lambda}\lambda b + (\nu(1 - \mu) + \frac{1 - \nu}{1 - \lambda})c. \end{aligned}$$

Tämä piste on suoralla ab, jos c:n kerroin on 0

$$\Leftrightarrow \nu(1 - \lambda)(1 - \mu) + 1 - \nu) = 0 \Leftrightarrow 1 = (1 - (1 - \lambda)(1 - \mu))\nu$$

$$\Leftrightarrow v = (1 - (1-\lambda)(1-\mu))^{-1}.$$

Koska $\lambda, \mu \in]0,1[$, niin $0 < (1-\lambda)(1-\mu) < 1$

$$\Rightarrow 0 < 1 - (1-\lambda)(1-\mu) < 1$$

$\Rightarrow v > 1$, kun v kiinnitetään kuten yllä olevassa yhtälössä. Siis

$$x = vq + (1-v)p \Rightarrow vq = x - (1-v)p \Rightarrow q = v^{-1}x - \frac{v-1}{v}p,$$

joten $v^{-1} \in]0,1[$. Siis näillä valinnoilla $B(p,q,x)$, missä

$$x = \mu v a + \frac{v-1}{1-\lambda}\lambda b,$$

missä kertoimien summa on 1 koska kertoimet on muodostettu sijoittamalla konvekseja kombinaatioita ja lisäksi kertoimet ovat positiivisia. Siis x on a:n ja b:n välissä. □

Lause 1.5. *Jatkumoaksioomaskeema on tosi standardimallissa.*

Todistus. Olkoot $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ parametrein määriteltäviä joukkoja. Oletetaan, että $X, Y \neq \emptyset$ (jos vähintään toinen olisi tyhjä joukko, niin ei olisi mitään todistettavaa). Oletetaan, sitten että kaikilla pisteillä $x \in X, y \in Y$ pätee $B(a,x,y)$, missä a on kiinteä piste. Kiinnitetään $y_0 \in Y$. Tarkastellaan niiden $\lambda \in [0,1]$ joukkoa S , joille on olemassa $x \in X$, jolle

$$x = \lambda a + (1-\lambda)y_0.$$

Huomattakoon, että

$$X = \{\, \lambda a + (1-\lambda)y_0 \mid \lambda \in S \,\},$$

sillä jokainen $x \in X$ on pisteiden a ja y_0 välissä. Koska $S \subseteq [0,1]$, niin on olemassa $\lambda_0 = \sup(S)$ (reaalilukujen täydellisyysaksiooma). Voidaan tarkistaa, että piste

$$b = \lambda_0 a + (1-\lambda_0)y_0$$

on pisteiden x ja y välissä kaikilla $x \in X$ ja $y \in Y$. □

1.3 Geometristen olioiden kuvailu Tarskin järjestelmässä

Jatkossa kahdella pisteellä tarkoitetaan kahta eri pistettä ellei muuta mainita. B vastaa *viivoitinta*: Se vastaa kysymyksiin kuten: "Onko b a:n ja c:n välissä? $\equiv$ vastaa *harppia*: Se vastaa kysymyksiin kuten: "Onko $|ab| = |ac|$? Entä $|ab| = |cd|$?"

Määritelmä 1.6. *Jana* koostuu kahden kiinteän pisteen välissä olevista pisteistä. Modernissä terminologiassa jana I on siis sellainen joukko, että on olemassa pisteet $a, b, a \neq b$, joille

$$I = \{\, x \in E \mid B(a,x,b) \,\},$$

missä E on käsiteltävä geometrinen avaruus.

Määritelmä 1.7. Kahden pisteen a ja b määräämä suora koostuu niistä pisteistä x, joille $B(a,x,b)$, $B(x,a,b)$ tai $B(a,b,x)$. *Suoralla* tarkoitetaan joidenkin kahden pisteen määräämää suoraa. Kaksi pistettä a ja b määräävät myös *puolisuoran*, joka koostuu pisteistä x, joille $B(a,x,b)$ tai $B(a,b,x)$.

Määritelmä 1.8. Olkoot $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Olkoot $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tason pisteitä. Oletetaan, että piste a_i ei ole pisteiden a_{i-1} ja a_{i+1} välissä. *Pisteiden $a_0, \ldots, a_{n-1}$ määräämä monikulmio* on janojen
$a_0a_1, \ldots, a_{n-2}a_{n-1}, a_{n-1}a_0$ yhdiste. Näitä janoja kutsutaan monikulmion *sivuiksi* ja pisteitä $a_0, \ldots, a_{n-1}$ monikulmion *kärjiksi*. Monikulmio on *yksinkertainen*, jos mitkään sivut eivät leikkaa (*Leikkaamisella* tarkoitetaan sitä, että geometrisillä olioilla on samoja pisteitä).

Määritelmä 1.9. *Ympyrä Y* koostuu niistä pisteistä, jotka ovat yhtä kaukana positiivisella etäisyydellä kiinteistä pisteetstä. Tarkemmin on olemassa eripisteet a ja b, joille

$$Y = \{\, x \in E \mid ax \equiv ab \,\},$$

missä E on taso.

1.4 Aksioomien muunnelmia

Paschin aksiooman muunnelmia:

Käyttämämme aksiooma on ns. *ulkoinen muoto* Paschin aksioomasta. On olemassa myös *sisäinen muoto*, missä lukitsemme pisteen q sivulta ab, jolloin aksiooma sanoo, että tällöin löytyy piste x sivulta ac, joka siis vastaa ulkoisen muodon lukittua pistettä q (geometrinen kuva on vastaava molemmissa tapauksissa).

Lisäksi on olemassa *heikko Paschin aksiooma*: Oletetaan, että piste t sijaitsee kolmion abc sisällä. Tällöin on olemassa piste d, joka on sivulla bc (eli $B(b,d,c)$), jolle $B(a,t,d)$. Tällöin on olemassa pisteet x ja y, joista x on sivulla ab ja y on sivulla ac, joille lisäksi $B(x,t,y)$.

Eukleideen aksiooman muunnelmia:

Pisteet a, b ja c ovat samalla suoralla tai samalla ympyrällä. Muodollisesti:

$$B(a,b,c) \vee B(b,c,a) \vee B(c,a,b) \vee \exists\, d(ad \equiv bd \wedge bd = cd).$$

1.5 Tarskin järjestelmän $EG^{(n)}$ perusominaisuuksia

Viiden janan aksioomalla on seuraava erikoistapaus.

Lause 1.10. *$EG^{(n)}$:ssä on voimassa seuraava. Jos $B(a,b,c), B(a',b',c'), ab \equiv a'b'$ ja $bc \equiv b'c'$, niin $ac \equiv a'c'$.*

Todistus. Jos $a = b$, niin $ac = bc \equiv b'c' = a'c'$, sillä $a'b' \equiv ab = aa \Rightarrow a' = b'$.

Oletetaan, että $a \neq b$. Valitaan $d = a$ ja $d' = a'$, jolloin viiden janan aksiooman oletukset ovat voimassa:

$$ab \equiv a'b', bc \equiv b'c', ad = aa \equiv a'a' = a'd', bd = ba \equiv ab \equiv a'b' \equiv b'a' \equiv b'd'.$$

Siis aksioomasta seuraa, että $cd = c'd'$ eli $ac \equiv ca = cd \equiv c'd' = c'a' \equiv a'c'$. □

Lause 1.11 (Välissäolorelaation perusominaisuuksia). *1)* $\forall a, b\ (B(a, b, b))$

2) $\forall a\ (B(a, a, a))$

3) $\forall a, b, c\ (B(a, b, c) \to B(c, b, a))$

4) $\forall a, b, c, d\ (B(a, b, d) \wedge B(b, c, d) \to B(a, b, c)$

5) $\forall a, b, c, d\ (B(a, b, c) \wedge B(b, c, d) \wedge b \neq c \to B(a, b, d))$

6) $\forall a, b, c, d\ (B(a, b, d) \wedge B(a, c, d) \to (B(a, b, c) \vee B(a, c, b)))$.

Todistus. Todistukset (HT). □

Lause 1.12. *Kaikille pisteille a, b ja c on voimassa, että*

1) $B(a, b, c) \Leftrightarrow B(c, b, a)$

2) $B(b, c, a) \Leftrightarrow B(a, c, b)$

3) $B(c, a, b) \Leftrightarrow B(b, a, c)$

Todistus. Todistukset (HT). Huomaa, että oletusten symmetriasta johtuen riittää todistaa vain yksi tapauksista. □

Lause 1.13. *Jos $B(a, b, c)$ ja $B(b, a, c)$, niin $a = b$*

Todistus. Koska $B(a, b, c)$ ja $B(b, a, c)$, niin aksioomasta 11 $\Rightarrow B(a, b, a)$. Nyt aksiooma 6 $\Rightarrow a = b$. □

Lause 1.14. *Olkoon $a \neq b$, $b \neq c$ ja $a \neq c$. Tällöin korkeintaan yksi ehdoista $B(a, b, c)$, $B(c, a, b)$ ja $B(b, c, a)$ pätee.*

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että ehdoista kaksi olisi voimassa. Oletusten symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että $B(a, b, c)$ ja $B(c, a, b)$. Nyt aiemmin esitetyn lauseen nojalla $B(b, a, c)$. Jolloin edellisestä lauseesta seuraa, että $a = b$. Näin olemme päätyneet ristiriitaan. □

Ulkoisen yhtenäisyyden perusteella:

$$\forall a, b, c(B(a, b, c) \wedge B(a, b, d) \wedge a \neq b)$$

$$\Rightarrow B(a, c, d) \vee B(a, b, c).$$

Lause 1.15 (Sisäinen yhtenäisyys). *Jos c ja d ovat molemmat janalla ab, niin $B(a, c, d)$ tai $B(a, d, c)$.*

Todistus. Oletetaan, että $B(a, c, b)$ ja $B(a, d, b)$. Jos $a = b$, niin pätee $c = d = a = b$, jolloin väite on tosi. Jos $c = d$, niin $B(a, c, c)$ eli $B(a, c, d)$. Oletetaan, että $a \neq b$ ja $c \neq d$. Valitaan janankonstruktioaksiooman avulla piste p, jolle $B(b, a, p)$ eli $B(p, a, b)$ ja $pa \equiv= ab$, mistä seuraa $p \neq a$, sillä $a \neq b$. Koska $B(p, a, b)$ ja $B(a, c, b)$, niin $B(p, a, c)$. Vastaavasti $B(p, a, d)$. Sovelletaan ulkoista yhtäläisyyttä. Koska $B(p, a, c)$, $B(p, a, d)$ ja $p \neq a$, niin $B(p, c, d)$ tai $B(p, c, d)$ eli $B(d, c, p)$. Symmetrian vuoksi oletetaan, että $B(p, c, d)$. Koska $B(d, c, p)$ ja $B(p, a, c)$ eli $B(c, a, p)$, niin $B(d, c, a)$ eli $B(a, c, d)$. ☐

Lemma 1.16. *Olkoot a ja b eri pisteitä sekä c ja d pisteiden a ja b määräämällä suoralla. Tällöin $B(a, c, d)$, $B(c, d, a)$ tai $B(d, a, c)$.*

Todistus. Todistus jakautuu tapauksiin sen mukaan miten pisteet c ja d sijaitsevat suoralla ab.

1) Jos c ja d sijaitsevat molemmat janalla ab, niin sisäisen yhtenäisyyden perusteella $B(a, c, d)$ tai $B(a, d, c) \Leftrightarrow B(c, d, a)$.

2) Oletetaan, että pisteet c ja d ovat molemmat a:sta lähtevällä b:n kautta kulkevalla puolisuoralla, mutteivat janalla ab. Nyt ulkoisen yhtenäisyyden aksioomasta seuraa $B(a, c, d)$ tai $B(a, d, c)$.

3) Oletetaan, että $B(c, a, b)$ ja $B(d, a, b)$. Ulkoisesta yhtenäisyydestä seuraa $B(b, c, d)$ tai $B(b, d, c)$. VOidaan olettaa $B(b, c, d)$. Koska $B(b, c, d)$ ja $B(c, a, b)$, niin $B(a, c, d)$.

4) Oletetaan, että $B(c, a, b)$ ja $B(a, d, b)$ (tapaus $B(d, a, b)$, $B(a, c, b)$ on samanlainen). Näistä seuraa suoraan, että $B(c, a, d)$ eli $B(d, a, c)$.

5) Oletetaan, että $B(c, a, d)$ ja $B(a, b, d)$ (HT).

6) Oletetaan, että $B(c, a, b)$ ja $B(a, b, d)$ (HT).

☐

1.6 Suorien järjestäminen

Lause 1.17. *Olkoon S a pisteen b kautta kulkeva puolisuora. Määritellään puolisuoralle S pisteiden x ja y välinen relaatio $\leq$ seuraavasti:*

$$x \leq y \Leftrightarrow B(a, x, y).$$

Tällöin $\leq$ on joukon S lineaarijärjestys.

Todistus. Refleksiivisyys: Kaikilla x pätee $B(a,x,x)$, joten $x \le x$, kun $x \in S$.

Antisymmetrisyys: Olkoot $x, y \in S$. Oletetaan, että $x \le y$ ja $y \le x$ eli $B(a,x,y) \Leftrightarrow B(y,x,a)$ ja $B(a,y,x) \Leftrightarrow B(x,y,a)$

$$\Rightarrow x = y.$$

Transitiivisuus: Oletetaan, että $x \le y$ ja $y \le z$, missä $x, y, z \in S$. Siis

$$B(a,x,y) \wedge B(a,y,z) \Rightarrow B(y,x,a) \wedge B(z,y,a) \Rightarrow B(z,y,x).$$

Siis $B(a,x,y)$ ja $B(x,y,z)$. Jos $x = y$, niin triviaalisti $x \le z$. Oletetaan siis, että $x \ne y$. Tällöin $B(a,x,z)$ eli $x \le z$.

Vertailullisuus: Olkoot $x, y \in S$, $x, y \ne a$. Edellisen lemman mukaan $B(a,x,y)$, $B(x,y,a)$ tai $B(y,a,x)$. Osoitetaan, että $B(y,a,x)$ on mahdotonta. Jos $B(a,b,x)$, niin $B(y,a,b)$, mikä on ristiriita sen kanssa, että $y \in S$. Siis $B(a,x,y)$ tai $B(a,y,x)$ eli $x \le y$ tai $y \le x$. ☐

Lemma 1.18. *Piste a jakaa pisteiden a ja b ($a \ne b$) kautta kulkevan suoran kahdeksi puolisuoraksi, joilla on yhteisenä pisteenä vain alkupiste a.*

Todistus. Olkoon l pisteiden a ja b kautta kulkeva suora. Merkitään $U = l \setminus \{a\}$. Tarkastellaan relaatiota $x, y \in U$,

$$E(x,y) \Leftrightarrow B(a,x,y) \vee B(a,y,x).$$

Pyritään osoittamaan, että kyseessä on ekvivalenssirelaatio, ja että tällä relaatiolla on tasan 2 ekvivalenssiluokkaa (jotka ovat puolisuoria).

Jokaisella pisteellä $x \in U$ pätee $B(a,x,x)$, joten E on *refleksiivinen*. Selvästi relaatio on myös textitsymmetrinen.

Todistetaan E:n *transitiivisuus*: Olkoon $x, y, z \in U$, jolle $E(x,y)$ ja $E(y,z)$ eli $B(a,x,y) \vee B(a,y,x)$ ja $B(a,y,z) \vee B(a,z,y)$. Tämä tarkoittaa, että x ja z molemmat ovat pisteestä a pisteen y kautta kulkevalla puolisuoralla. Edellisen lauseen mukaan tälle puolisuoralle saadaan määriteltyä lineaarijärjestys, jonka vertailullisuudesta seuraa $B(a,x,z)$ tai $B(a,z,x)$, joten $E(x,z)$. Siis E on *transitiivinen*. Olemme näin osoittaneet, että E on ekvivalenssirelaatio.

Osoitetetaan seuraavaksi, että E:llä on kaksi ekvivalenssiluokkaa. Janankonstruktioaksiooman nojalla voimme valita pisteen c, jolle $B(b,a,c)$ ja $ac \equiv ab$. Koska $a \ne b$, niin $a \ne c$. Tiedetään, että ehdoista $B(b,a,c)$, $B(a,c,b)$ ja $B(c,b,a)$ korkeintaan yksi voi olla voimassa. Siis kumpikaan ehdoista $B(a,c,b)$ ja $B(a,b,c)$ ei ole voimassa. Siis $E(b,c)$ ei ole voimassa, joten pisteet b ja c ovat eri ekvivalenssiluokissa. Jos $x \in U$ ja $E(x,b)$ ei päde, niin $B(x,a,b)$. Koska $B(b,a,x)$ ja $B(b,a,c)$, niin ulkoisesta yhtenäisyydestä seuraa $B(b,x,c)$ tai $B(b,c,x)$. Jos $B(b,c,x)$, niin kun tähän yhdistetään $B(b,a,c)$, niin $B(a,c,x)$. Jos taas $B(b,x,c)$ (ja $B(b,a,x)$), niin $B(a,x,c)$. Välttämättä siis $E(x,c)$.

Siis E on ekvivalenssi, jossa on kaksi ekvivalenssiluokkaa. Merkitään

$$l_+ := \{\, x \in U \mid E(b,x) \,\} \cup \{a\},$$
$$l_- := \{\, x \in U \mid E(c,x) \,\} \cup \{a\}.$$

Suoraan määritelmänsä nojalla l_+ ja l_- ovat puolisuoria, joille $l_+ \cap l_- = \{a\}$ ja $l_+ \cup l_- = l$. □

Lause 1.19. *Jokaisessa suorassa l voidaan määritellä sellainen lineaarijärjestys $\leq$, että kaikille $z, y, z \in l$ pätee*

$$B(x, y, z) \Leftrightarrow x \leq y \leq z \vee z \leq y \leq x.$$

Todistus. Oletetaan, että l on pisteiden a ja b määräämä suora ($a \neq b$). Edellisen lemman mukaan piste a jakaa suoran l kahdeksi puolisuoraksi l_+ ja l_-, joille $l_+ \cap l_- = \{a\}$. Voidaan valita merkinnät siten, että l_+ kulkee pisteen b kautta. Tiedetään, että l_+ voidaan lineaarijärjestää relaatiolla $\leq_+$:

$$x \leq_+ y \Leftrightarrow B(a, x, y)$$

, kun $x, y \in l_+$. Vastaavasti l_- voidaan lineaarijärjestää relaatiolla $\leq_-$:

$$x \leq_- y \Leftrightarrow B(x, y, a) \Leftrightarrow B(a, y, x),$$

kun $x, y \in l_-$ (tässä käytetään käänteistä järjestystä).

Määritellään nyt $\leq$ asettamalla

$$\leq = \leq_- \cup \leq_+ \cup (l_- \times l_+).$$

Siis kun $x, y \in l$, niin $x \leq y$, jos jokin seuraavista pätee

1) $x, y \in l_+$ ja $x \leq_+ y$,

2) $x, y \in l_-$ ja $x \leq_- y$,

3) $x \in l_-, y \in l_+ (\Rightarrow (x, y) \in l_- \times l_+ \Rightarrow x \leq y)$.

Tällöin $\leq$ on lineaarijärjestys.

Refleksiivisyys ja *vertailullisuus* seuraavat suoraan $\leq_-$ ja $\leq_+$ vastaavista ominaisuuksista.
Antisymmetrisyys: Olkoon $x, y \in l$ pisteitä, joille $x \leq y$ ja $y \leq x$. Jos $x \in l_+ \setminus \{a\}$, niin ehdosta $x \leq y$ seuraa, että $y \in l_+ \setminus \{a\}$ ja $x \leq_+ y$. Samoin saadaan $y \leq_+ x$, joten $x = y$. Voidaan siis olettaa, että $x, y \in l_-$. Jos $x = a$, niin $a \leq y$ eli $a \leq_- y$ tai $y \in l_+$. Molemmissa tapauksissa $y = a = x$ ($l_+ \cap l_- = \{a\}$). Oletetaan, että $x \in l_- \setminus \{a\}$. Tällöin ehdosta $x \leq y$ ja $y \leq x$ seuraa, että $x \leq_- y$ ja $y \leq_- x$, joten $x = y$.
Transitiivisuus: Olkoon $x, y, z \in l$. Oletetaan, että $x \leq y$ ja $y \leq z$. Tarkastellaan tapauksia

a) $x \in l_+$: Nyt myös $y, z \in l_+$. Voidaan olettaa, että $x \neq a$, koska aina $a \leq_+ z$. Tällöin $x \leq_+ y \leq_+ z$, joten $x \leq_+ z$, mistä saadaan $x \leq z$.

b) $x \in l_- \setminus \{a\}$: Jos $z \in l_+$, niin $x \leq z$ suoraan määritelmästä. Oletetaan siis, että $z \in {}_- \setminus \{a\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} &x \leq y \wedge y \leq z \\ \Rightarrow &x \leq_- y, y \leq_- z \\ \Rightarrow &x \leq_- z \Rightarrow x \leq z. \end{aligned}$$

Siis $\leq$ on lineaarijärjestys.

Todistetaan sitten, että $B(x, y, z) \Leftrightarrow x \leq y \leq z \vee z \leq y \leq x$: Olkoon x, y, z suoran l pisteitä.
Jos $x = y$, niin $B(x, y, z)$ eli $B(x, x, z)$ pätee triviaalisti. Samoin järjestyksen vertailullisuuden vuoksi $x \leq z$ tai $z \leq x$ eli $x \leq y \leq z$ tai $z \leq y \leq x$. Tapaus $y = z$ käsitellään samalla tavalla.
Jos $x = z$, niin $B(x, y, z)$ eli $B(x, y, x)$. Siis $x = y = z$. Samoin

$$x \leq y \leq z \Leftrightarrow z \leq y \leq z \Leftrightarrow x \leq y \leq x$$

ja antisymmetrisyyden vuoksi $x = y = z$.
Oletetaan jatkossa, että x, y, z ovat eri pisteitä. Nämä kolme pistettä voivat suoralla l asettua 6 eri järjestykseen. Tästä saadaan toisensa poissulkevia tapauksia:

1) ”$x \leq y \leq z$”: Vt. $B(x, y, z)$.

2) ”$z \leq y \leq x$”: Vt. $B(x, y, z)$.

3) ”$y \leq z \leq x$”: Vt. $\neg B(x, y, z)$.

4) ”$x \leq z \leq y$”: Vt. $\neg B(x, y, z)$.

5) ”$y \leq x \leq z$”: Vt. $\neg B(x, y, z)$.

6) ”$z \leq x \leq y$”: Vt. $\neg B(x, y, z)$.

1) Oletetaan, että $x \leq y \leq z$.
   a) Oletetaan lisäksi, että $a \leq x$ eli x, y, z ovat kaikki puolisuoralla l_+. Koska $x \leq y$ ja $y \leq z$, niin $B(a, x, y)$ ja $B(a, y, z)$, joten välissäolon sisäisen transitiivisuuden (ja symmetrisyyden) vuoksi $B(x, y, z)$.
   b) Oletetaan, että $z \leq a$. Nyt väite seuraa kuten kohdassa a).
   c) Oletetaan, että $z \leq a \leq y \leq z$. Tällöin $B(x, a, y)$ ja $B(a, y, z)$, joten $B(x, y, z)$.
   d) Oletetaan, että $x \leq y \leq a \leq z$. Nyt väite seuraa kuten kohdassa c).

2) Oletetaan, että $z \leq y \leq x$. Nyt kohdan 1) mukaan $B(z, y, x)$ eli $B(x, y, z)$.

3) Oletetaan, että $x \leq z \leq y$. Nyt kohdan 1) mukaan $B(x, z, y)$. Siis $\neg B(x, y, z)$, koska x, y, z ovat eri pisteitä. Loput kohdat 4–6) kuten kohta 3).

□

Seuraus 1.20. *Oletetaan, että suorat l ja l' leikkaavat kahdessa pisteessä. Tällöin $l = l'$.*

Todistus. Oletetaan aluksi, että suora l on pisteiden a ja b määräämä, suora l' on pisteiden a ja c määräämä sekä lisäksi, että c on suoralla l. Olkoon x suoralla l. Tällöin a, c ja x ovat kaikki suoralla l jossakin järjestyksessä. Jokin kuudesta mahdollisesta järjestyksestä on voimassa edellisen lauseen nojalla.

Jokaisessa tapauksessa x on myös suoralla l'. Siis $l \subseteq l'$. Erityisesti b on suoralla l', joten suorien l ja l' sekä pisteiden b ja c roolit voi vaihtaa. Siis $l' \subseteq l$. Siis $l = l'$.

Yleisessä tapauksessa l on pisteiden a ja b määräämä ja l' pisteiden c ja d. Lisäksi pisteet $x, y, x \neq y$ ovat molemmilla suorilla l, l'. Voidaan olettaa, että $a \neq x$. Pisteet a ja x määräävät tällöin suoran l^* ja pisteet x ja y suoran l^{**}. Nyt edellä olleen tarkastelun perusteella

$$l = l^* = l^{**}.$$

Vastaavasti saadaan, että $l' = l^{**}$ eli $l = l'$. □

Koska mitkä tahansa kaksi pistettä määräävät suoran, niin on samantekevää puhutaanko suoran määräävistä pisteistä vai suoralla olevista pisteistä.

Seuraus 1.21. *Tasossa minkä tahansa suoran ulkopuolella on piste.*

Todistus. Olkoon l suora ja a, b, c pisteitä, joille

$$\neg B(a, b, c) \vee \neg B(b, c, a) \vee \neg B(c, a, b).$$

Voidaan olettaa, että $a, b \in l$. Tällöin a ja b määräävät suoran l. Tällöin yllä olevista oletuksista seuraa, että $c \notin l$. □

Lause 1.22. *Olkoon l suora ja $\leq$ sen suunnistus, ts. $\leq$ on sellainen joukon l lineaarijärjestys, että kaikille $x, y, z \in l$ pätee*

$$B(x, y, z) \Leftrightarrow x \leq y \leq z \vee z \leq y \leq x.$$

Tällöin $\leq$ on tiheä, ts. jos $x, y \in l$, $x < y$, niin on olemassa z, jolle $x < z < y$.

Todistus. Tiedetään, että on olemassa piste q, joka ei ole suoralla l (joka kulkee pisteiden x ja y, $x \neq y$, kautta).

Janan konstruktioaksioomalla saadaan piste a, jolle $B(x, q, a)$ ja $q \neq a$ (vaaditaan esim. $qa \equiv xq$). Samalla tavalla voidaan konstruoida piste p, jolle $B(y, a, p)$ ja $a \neq p$.

Sovelletaan Paschin aksioomaa kolmioon xya. Paschin aksiooman mukaan on olemassa sellainen z, että $B(x, z, y)$ ja $B(z, q, p)$. Koska $\leq$ on suoran l suunnistus, niin $x \leq z \leq y$. Riittää siis osoittaa, että $x \neq z$ ja $y \neq z$. Jos $z = x$, niin $z = x$ ja q kautta kulkeva suora kulkisi myös pisteiden p ja a kautta. Koska $a \neq p$, suora l' olisi toisaalta a:n ja p:n määräämä, joten myös piste y olisi suoralla l'. Koska $x, y \in l' \Rightarrow l = l'$. Niin olemme päätyneet ristiriitaan, sillä $q \notin l$. Vastaavasti tapaus $z \neq y$.

□

1.7 Aritmetiikkaa suoralla

Lemma 1.23 (Janan konstruktion yksikäsitteisyys). *Kaikilla pisteillä a, b, c, q on olemassa yksikäsitteinen x, jolle $B(q, a, x)$ ja $ax \equiv bc$.*

Todistus. Janan konstruktioaksiooman nojalla tälläinen x on olemassa. Oletetaan, että x' olisi myös tälläinne piste, jolle $B(q, a, x')$ ja $ax' \equiv bc$. Tällöin $ax \equiv ax'$ ja a, x, x' ovat samalla (puoli)suoralla qa. Voidaan olettaa, että $B(a, x, x')$. Siis $ax \equiv ax'$, $ax \equiv ax$, mistä seuraa laskuharjoitusten nojalla $xx' \equiv xx \Rightarrow x = x'$. □

Lause 1.24. *Olkoon l suora ja $\leq$ sen suunnistus. Tällöin suora l voidaan varustaa sellaisella yhteenlaskulla $+$, että*

1) $(l, +, \leq)$ on järjestetty Abelin ryhmä, ts. Abelin ryhmä, jolle

$$x \leq y \Rightarrow x + t \leq y + t,$$

kun $x, y, t \in l$.

2) kaikilla $x, y, x', y' \in l$ pätee:

$$\exists t \in l : (x' = x + t \wedge y' = y + t) \Rightarrow xy \equiv x'y'.$$

Edellä oleva voidaan todistaa Tarskin aksioomajärjestelmässä. Jos l on erityisesti euklidisen avaruuden suora, niin

$$(l, +, \leq) \cong (\mathbb{R}, +, \leq).$$

Todistushahmotelma. Kiinnitetään suoralta l piste, jota merkitään nollalla (0). Kun $x, y \in l$, summa $z = x + y \in l$ on se yksikäsitteinen piste, jolle

a) jos $y \geq 0$, niin $z \geq x$ ja $xz \equiv 0y$,

b) jos $y < 0$, niin $z < x$ ja $zx \equiv y0$.

Summan olemassaolo seuraa janankonstruktioaksioomasta ja yksikäsitteisyys edellisestä lemmasta. Näin on itseasiassa pakko määritellä: lauseen ehdoista seuraa, että

$$y \geq 0 \Rightarrow z = x + y = y + x \geq 0 + x = x$$

ja edelleen

$$0 = x + (-x), \quad y = x + y + (-x) = z + (-x) \Rightarrow xz \equiv 0y$$

ja kohdalla b) vastaavasti.

Ehdoista seuraa myöskin, että vasta-alkion (-x) on oltava se suoran l piste, joka on pisteen 0 toisella puolella kuin x ja jolle $(-x)0 \equiv 0x$, kunhan $x \neq 0$.

Lopun tarkastus on janakongruenssiin liittyvää tekniikkaa. □

Lause 1.25 ($EG^{(n)}$)**.** *Jokaisella janalla ab on keskipiste, ts. on olemassa sellainen c, että $B(a,c,b)$ ja $ac \equiv cb$.*

Todistus. Voidaan olettaa, että ab ei ole surkastunut jana (ts. $a \neq b$). Tiedetään jo, että pisteiden a ja b välissä on pisteitä. Suunnataan suora ab niin, että $a < b$. Merkitään X:llä niiden pisteiden x joukkoa, jotka ovat a:n ja b:n välissä ja joille on olemassa sellainen y janalla ab, että

$$ax \equiv yb, \quad x \leq y.$$

Vastaavasti merkitään Y:llä sellaisten pisteiden y joukkoa, että $B(a,y,b)$ ja on olemassa janan ab piste x, jolle

$$yb \equiv ax, \quad y \geq x.$$

Joukkojen X ja Y määritelmistä seuraa suoraan, että jokaisella $x \in X$ on olemassa $y \in Y$, jolle

$$ax \equiv yb, \quad x \leq y.$$

(Vastaavasti jokaisella $y \in Y$ on olemassa $x \in X$).

Edelleen havaitaan, että kaikilla $x, x' \in X$ ja $y, y' \in Y$, joille

$$(ax \equiv yb, x \leq y) \text{ ja } (ax' \equiv y'b, x' \leq y'),$$

pätee jos $x \leq x'$, niin $y' \leq y$. Tällöin siis $x \leq x' \leq y' \leq y$.

Jos $X, Y \neq \emptyset$, niin jatkumoskeeman oletukset pätevät pisteeseen a ja joukkoihin X ja Y nähden. Tällöin siis $B(a,x,y)$, kun $x \in Y$ ja $y \in Y$. Triviaalisti $a \in X$ ja $b \in Y$, mutta itse asiassa voidaan kertoa paljon enemmän: Janalla ab on sisäpiste, ts. sellaisia pisteitä t, joilla $a, b \neq t$.

Jos t on tälläinen ja t' on suoran ab piste, jolle $at \equiv t'b$ ja $t' \leq b$, niin t' on myös ab:n sisäpiste. Tällöin on kaksi tapausta $t \leq t'$ tai $t' \leq t$. Jos $t \leq t'$, niin $t \in X, t' \in Y$. Jos $t' \leq t$, niin $t' \in X, t \in Y$. Siis $X \cup Y = ab$.

Jatkumoskeeman mukaan on olemassa piste t, jolle pätee $B(x,t,y)$, kun $x \in X, y \in Y$. Erityisesti t on on janalla ab. Siis $t \in X \cup Y$. Jos $t \in X$, niin on olemassa $t' \in Y$, jolle $at \equiv t'b$ ja $t \leq t'$. Havaitaan, että $t = t'$: Jos $t \neq t'$, niin t:n ja t':n välissä piste, joka ei kuuluisi X:ään eikä Y:hyn. Tämä on ristiriita, koska $X \cup Y = ab$. Vastaavasti, jos $t \in Y$. Siis $at \equiv tb$. □

1.8 Janan mittaaminen

Edellinen lause merkitsee sitä, että janan pituuden mittaamiseksi voidaan geometrisessa avaruudessa toimia vastaavasti:

- Kiinnitetään kaksi pistettä ja niiden kautta kulkeva suora l.
- Suunnistetaan l näiden pisteiden avulla.
- Kiinnitetään toinen pisteistä nollaksi.

- Varustetaan l edellisen lauseen mukaisella yhteenlaskulla.
- Näin on kiinnitetty *pituusmitta-järjestelmä*.
- Janan ab pituudeksi $|ab|$ voidaan nyt määritellä se l:n piste x, jolle $x \geq 0$ ja $ab \equiv 0x$.
- Euklidisessa avaruudessa pituusmitta-järjestelmä voidaan samaistaa reaaliluku-järjestelmän kanssa.

Lause 1.26. *Olkoon l suora, $\leq$ suunnistus ja $+$ edellisessä lauseessa kuvattu yhteenlasku. Tällöin l voidaan varustaa kertolaskulla $\cdot$ niin, että $(l, +, \cdot, \leq)$ on järjestetty kunta, ts. $(l, +, \cdot)$ on kunta, $(l, +, \leq)$ on järjestetty Abelin ryhmä ja kaikilla $x, y \in l$ pätee:*

$$x > 0, y > 0 \Rightarrow xy > 0.$$

Todistus. Luennoilla esitettiin kuvaan perustuva hahmotelma kertolaskun määrittelemisestä. $\square$

2 Tasogeometriaa

Tavoitteena on:

- Käydä läpi perusgeometrian tuloksia.
- Selventää niihin liittyviä käsitteitä ja menetelmiä.

Lause 2.1 (Pythagoraan lause)**.** *Olkoon ABC suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet ovat $a = |BC|$ ja $b = |AC|$ sekä hypotenuusa $c = |AB|$. Tällöin $c^2 = a^2 + b^2$.*

Todistus. Useita havainnollisia todistuksia (luennot/HT). □

2.1 Kolmion merkilliset pisteet

Huomaa, että käytettyjen käsitteiden määritelmät esitellään lauseiden todistuksissa.

Lause 2.2. *Kolmion ABC keskinormaalit leikkaavat yhdessä pisteessä, joka on kolmion ympäripiirretyn ympyrän keskipiste.*

Todistus. Olkoon l sivun AB, m sivun AC ja n sivun BC keskinormaalit. Tasossa janan *keskinormaali* muodostuu niistä pisteistä, jotka ovat yhtä kaukana janan päätepisteistä.

Kolmion sivut eivät ole yhdensuuntaisia, joten niiden keskinormaalitkaan eivät ole yhdensuuntaisia. Siis esim. l ja m leikkaavat jossakin pisteessä, olkoon se O. Suoran l pisteet ovat yhtä kaukana pisteistä A ja B. Vastaavasti suora m on yhtä kaukana pisteistä A ja C. Koska piste O on molemmilla suorilla, niin se on yhtä kaukana pisteistä A, B ja C. Siis voidaan piirtää O keskeinen ympyrä, joka kulkee pisteiden A, B ja C kautta. Selvästi myös l, n ja n, m leikkaavat O:ssa. □

Lause 2.3. *Kolmion ABC kulmanpuolittajat leikkaavat yhdessä pisteessä, joka on kolmion sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste.*

Todistus. Olkoon l kulman $\measuredangle BAC$ kulmanpuolittajat, vastaavasti m $\measuredangle ABC$:n ja n $\measuredangle ACB$:n. *Kulmanpuolittaja* koostuu niistä pisteistä, jotka ovat yhtä kaukana kulman kyljistä.

Siis suora l koostuu niistä pisteistä, jotka ovat yhtä kaukana suorista AB ja AC. Suorista l, m ja n mitkään kaksi eivät ole yhdensuuntaisia. Koska suoran m pisteet ovat yhtä kaukana suorista AB ja BC, niin suorien l ja m leikkauspiste O on yhtä kaukana suorista AB, AC ja BC.

Nyt piirretään O-keskinen ympyrä, jonka säde on tämä etäisyys. Piste O on suorilla l, m ja n. □

Lause 2.4. *Kolmion ABC korkeusjanojen jatkeet leikkaavat yhdessä pisteessä.*

Todistus. Kolmion kärjestä C lähtevän korkeusjanan jatke olkoon l, kärjestä B m ja kärjestä A n.

Otetaan käyttöön apupisteet A', B' ja C' joille $ABA'C$, $ABCB'$ ja $CAC'B$ ovat suunnikkaita. Erityisesti sivut $A'C$ ja CB' ovat molemmat AB:n kanssa yhdensuuntaisia ja $|A'C| = |AB| = |CB'|$. Siis C on sivun $A'B'$ keskipiste ja lisäksi l on sen keskinormaali. Muut janat päätellään vastaavasti. Koska $A'B'C'$:n keskinormaalit leikkaavat yhdessä pisteessä, niin lause on todistettu. □

2.2 Mitä on pinta-ala?

Yksinkertainen monikulmio määrittää alan eli niiden pisteiden joukon, jotka jäävät monikulmion sisäpuolelle (ks. Jordanin käyrälause). Haluttaisiin liittää tähän joukkoon mitta, *pinta-ala*, jolla on tiettyjä perusominaisuuksia.

Merkitään monikulmion määräämän joukon A pinta-alaa $m(A)$:lla. Pinta-alalla oletetaan olevan seuraavia perusominaisuuksia:

1) $m(A) \geq 0$, $m(A) \in \mathbb{R}$.

2) $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$.

3) Jos A ja B leikkaavat korkeintaan janalla, niin $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

4) Yhtenevät joukot ovat pinta-alaltaan yhtä suuria.

Määritelmä 2.5. Olkoon $\mathcal{A}$ perhe joukkoja ja $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ $(:= \mathbb{R}_+ \cup \{0, \infty\})$. Joukkofunktio μ on *monotoninen*, jos kaikilla $A, B \in \mathcal{A}$ pätee:

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B).$$

Joukkofunktio μ on *äärellisesti additiivinen*, jos $\mathcal{A}$ on äärellisten yhdisteiden suhteen suljettu ja kaikilla $A, B \in \mathcal{A}$ pätee:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Joukkofunktio μ on *σ-additiivinen* eli *numeroituvasti additiivinen*, jos A on numeroituvien yhdisteiden suhteen suljettu ja kun A_i, $i \in \mathbb{N}$ ovat pareittain erillisiä (ts. $A_i \cap A_j = \emptyset$, kun $i \neq j$), niin

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i).$$

Määritelmä 2.6. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ on *joukon X Boolen algebra*, jos

1) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

2) $\mathcal{A}$ on komplementtien suhteen suljettu, ts. jos $A \in \mathcal{A}$, niin $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

3) $\mathcal{A}$ on yhdisteiden suhteen suljettu.

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ on *joukon X σ-algebra*, jos se on X:n Boolen algebra ja ehto 3) on voimassa voimakkaamassa muodossa: 3') $\mathcal{A}$ on numeroituvien yhdisteiden suhteen suljettu.

Määritelmä 2.7. Oletetaan, että $\mathcal{A}$ on σ-algebra. Joukkofunktio $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ on *mitta*, jos

1) $\mu(\emptyset) = 0$.

2) μ on monotoninen.

3) μ on σ-additiivinen.

Jos ehtoa 3) heikennetään äärellisesti additiivisuudeksi, niin voidaan puhua *äärellisesti additiivisesta mitasta*.

Lause 2.8 (Lebesgue). *Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on olemassa σ-algebra $\mathcal{L}$ ja mitta $m\colon \mathcal{L} \to [0, \infty]$, jolla on seuraavat ominaisuudet:*

a) Kaikilla $a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ pätee

$$\begin{aligned}&[a_0, b_0] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \\ &= \left\{ (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \forall i \in \{0, \dots, n-1\}(a_i \leq x_i \leq b_i) \right\} \in \mathcal{L}.\end{aligned}$$

b) $m([0,1]^n) = 1$.

c) Jos $A, B \in \mathcal{L}$ ovat yhteneviä, niin $m(A) = m(B)$.

Todistus. Sivuutetaan (analyysin asiaa). □

Esimerkki 2.9. Kaksi yhtä pitkää janaa ovat yhteneviä.

Esimerkki 2.10. Jos kahdella kappaleella on sama pinta-ala, niin ne koostuu yhtenevistä osista, mutta välttämättä eivät ole yhteneviä.

2.3 Yhtenevyys

Määritelmä 2.11. Olkoon $(V, B, \equiv)$ avaruus, joka toteuttaa Tarskin aksioomajärjestelmän $EG^{(n)}$. Tällöin kuvaus $f\colon V \to V$ on *yhtenevyyskuvaus* eli *isometria*, jos kaikilla $a, b \in V$ pätee

$$ab \equiv f(a)f(b).$$

Huomautus 2.12. Jos $V = \mathbb{R}^n$, niin ehdon voi kirjoittaa muotoon

$$|a - b| = |f(a) - f(b)| .$$

Kurssilla käytettiin yhtenevyyskuvauksesta pääsääntöisesti turhan vaikeaa ilmaisua *"yhteneväisyyskuvaus"*.

Lause 2.13. *Yhtenevyyskuvaus $f\colon V \to V$ on itseasiassa avaruuden $(V, B, \equiv)$ automorfismi, ts. f on bijektio ja säilyttää myös välissäolon: Jos $a, b, c \in V$, niin*

$$B(a, b, c) \Leftrightarrow B(f(a), f(b), f(c)).$$

Todistus. HT. □

Lause 2.14. *Olkoon $(V, B, \equiv)$ Tarskin aksioomajärjestelmää noudattava avaruus. Tällöin yhtenevyyskuvauksien joukko G kuvausten yhdistämisellä varustettun on ryhmä. Siis $(G, \circ)$ on ryhmä, missä*

$$G := \{ f\colon V \to V \mid f \text{ on yhtenevyyskuvaus} \}.$$

Todistus. Identtinen kuvaus id_V on yhtenevyyskuvaus, sillä kaikilla $a, b \in V$ pätee

$$\mathrm{id}_V(a)\,\mathrm{id}_V(b) = ab \equiv ab.$$

Kahden kuvauksen $f, g\colon V \to V$ yhdistetty kuvaus $f \circ g$ on yhtenevyyskuvaus, sillä

$$(f \circ g)(a)(f \circ g)(b) = f(g(a))f(g(b)) \equiv g(a)g(b) \equiv ab,$$

kun $a, b \in V$. Siis $(G, \circ)$ on algebrallinen rakenne, jossa id_V on neutraalialkio ($f \circ \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_V \circ f = f$).

Kun $f \in G$, niin f on bijektio ja $f^{-1}\colon V \to V$ huomataan yhtenevyyskuvaukseksi seuraavasti. Kun $a, b \in V$, niin

$$f^{-1}(a)f^{-1}(b) \equiv f(f^{-1}(a))f(f^{-1}(b)) \equiv ab.$$

Koska kuvausten yhdistäminen on liitännännäinen ja f^{-1} on f:n käänteisalkio, niin $(G, \circ)$ on ryhmä. □

2.4 Siirto, peilaus ja kierto

Lemma 2.15. *Siirto $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_0, x_1) = (x_0 + t_0, x_0 + t_0)$ vektorin $t = (t_0, t_1)$ verran on yhtenevyyskuvaus.*

Todistus. Kaikilla $x = (x_0, x_1), y = (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ pätee

$$|f(x) - f(y)| = |(x + t) - (y + t)| = |x - y| .$$ □

Lemma 2.16. *Peilaus x-akselin suhteen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,*

$$f(x_0, x_1) = (x_0, -x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (x_0, x_1)$$

on yhtenevyyskuvaus.

Todistus. Kun $x = (x_0, x_1)$, $y = (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, niin

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x_0, x_1) - f(y_0, y_1)| = |(x_0, -x_1) - (y_0 - y_1)| \\ &= |(x_0 - y_0, -x_1 + y_1)| = \sqrt{(x_0 - y_0)^2 + (y_1 - x_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_0 - y_0)^2 + (x_1 - y_1)^2} = |x - y|\,. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.17. *Kierto origon suhteen kulman φ verran $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,*

$$f(x_0, x_1) = (x_0 \cos\varphi - x_1 \sin\varphi, x_0 \sin\varphi + x_1 \cos\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} (x_0, x_1)$$

on yhtenevyyskuvaus.

Todistus. Kun $x = (x_0, x_1)$, $y = (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, niin

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |(x_0 \cos\varphi - x_1 \sin\varphi, x_0 \sin\varphi + x_1 \cos\varphi) \\ &\qquad - (y_0 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi, y_0 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi)| \\ &= |((x_0 - y_0)\cos\varphi + (y_1 - x_1)\sin\varphi, (x_0 - y_0)\sin\varphi + (x_1 - y_1)\cos\varphi)| \\ &= \sqrt{\big((x_0 - y_0)\cos\varphi + (y_1 - x_1)\sin\varphi\big)^2 + \big((x_0 - y_0)\sin\varphi + (x_1 - y_1)\cos\varphi\big)^2} \\ &= \sqrt{\begin{array}{l} (x_0 - y_0)^2\cos^2\varphi + 2(x_0 - y_0)(y_1 - x_1)\cos\varphi\sin\varphi + (y_1 - x_1)^2\sin^2\varphi \\ \quad +(x_0 - y_0)^2\sin^2\varphi + 2(x_0 - y_0)(x_1 - y_1)\sin f\cos\varphi + (x_1 - y_1)^2\cos\varphi \end{array}} \\ &= \sqrt{\begin{array}{l} (x_0 - y_0)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + (x_1 - y_1)^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \\ \quad -2(x_0 - y_0)(x_1 - y_1)\cos\varphi\sin\varphi + 2(x_0 - y_0)(x_1 - y_1)\sin f\cos\varphi \end{array}} \\ &= \sqrt{(x_0 - y_0)^2 \cdot 1 + (x_1 - y_1)^2 \cdot 1 + 0} = \sqrt{(x_0 - y_0)^2 + (x_1 - y_1)^2} \\ &= |x - y|\,. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.18. *Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yhtenevyyskuvaus. Tällöin on olemassa sellainen $t \in \mathbb{R}^2$ ja yhtenevyyskuvaus $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, että $g(0,0) = (0,0)$ ja $f = g \circ s_t$, missä s_t on siirto vektorin t verran.*

Todistus. Koska yhtenevyyskuvaukset muodostavat ryhmän, niin myös f^{-1} on yhtenevyyskuvaus. Merkitään $t = -f^{-1}(0,0)$. Etsitäänyhtälölle $f = g \circ s_t$ ratkaisu:

$$f = g \circ s_t \Leftrightarrow f \circ (s_t)^{-1} = g.$$

Valitaan siis $g = f \circ (s_t)^{-1} = f \circ s_{-t}$. Tälle pätee

$$g(0,0) = f(s_{-t}(0,0)) = f(-t) = f(f^{-1}(0,0)) = (0,0).$$

□

Lemma 2.19. *Tason yhtenevyyskuvaukset säilyttävät suorat kulmat, ts. jos $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on yhtenevyyskuvaus ja $\measuredangle abc = \pi/2$, niin $\measuredangle f(a)f(b)f(c) = \pi/2$, missä $a, b, c \in \mathbb{R}^2$.*

Todistus. HT. □

Lemma 2.20. *Olkoon $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yhtenevyyskuvaus, jolle $g(0,0) = (0,0)$. Tällöin on olemassa sellainen $\varphi \in [0, 2\pi[$, että*

$$g(1,0) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

ja

$$g(0,1) = (-\sin\varphi, \cos\varphi) \vee g(0,1) = (\sin\varphi, -\cos\varphi).$$

Todistus. Koska pisteen $(1,0)$ etäisyys origosta on 1 ja $g(0,0) = (0,0)$, niin $g(1,0)$ on yksikköympyrällä. Siis

$$g(1,0) = (\cos\varphi, \sin\varphi),$$

jollakin $\varphi \in [0, 2\pi[$. Koska $(1,0)\perp(0,1)$ ja $g(0,0) = (0,0)$, niin edellisen lemman nojalla

$$g(1,0) = (\cos\varphi, \sin\varphi)\perp g(0,1).$$

Siis

$$(\cos\varphi, \sin\varphi) \cdot g(0,1) = 0 \Rightarrow g(0,1) = \lambda(-\sin\varphi, \cos\varphi).$$

Edelleen koska $g(0,1)$ on yksikköympyrällä, niin $\lambda = 1$. □

Lemma 2.21. *Olkoon $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yhtenevyyskuvaus, jolle*

$$\begin{aligned} g(0,0) &= (0,0), \\ g(1,0) &= (\cos\varphi, \sin\varphi) \text{ ja} \\ g(0,1) &= (-\sin\varphi, \cos\varphi), \end{aligned}$$

missä $\varphi \in \mathbb{R}$. Tällöin g on kierto kulman φ verran origon ympäri.

Todistus. Koska yhtenevyyskuvaus säilyttää välissäoloreaaltion, niin $g(x_0, 0)$ on samalla origon kautta kulkevalla suoralla kuin $g(1,0) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Ainoa mahdollisuus on

$$g(x_0, 0) = (x_0\cos\varphi, x_0\sin\varphi),$$

sillä

$$|g(x_0,0)| = |g(x_0,0) - g(0,0)| = |(x_0,0) - (0,0)| = |x_0|$$

ja
$$|g(x_0,0)-g(1,0)| = |(x_0,0)-(1,0)| = |x_0-1|\,.$$
Samalla tavalla päätellään, että $g(0,x_1) = x_1 g(0,1) = (-x_1\sin\varphi, x_1\cos\varphi)$. Koska g säilyttää suorat kulmat, niin pisteet $g(0,0) = (0,0)$, $g(x_0,0)$, $g(0,x_1)$ ja $g(x_0,x_1)$ ovat suorakaiteen kärjet. Siis
$$g(x_0,x_1) = g(x_0,0) + g(0,x_1) = (x_0\cos\varphi - x_1\sin\varphi, x_0\sin\varphi + x_1\cos\varphi).$$
Siis kierto φ:n verran $(0,0)$:n ympäri. $\square$

Lause 2.22. *Peilaus p x-akselin suhteen, kierto k_φ kulman φ verran origon ympäri ($\varphi \in [0,2\pi[$) ja siirto s_t vektorin $t \in \mathbb{R}^2$ verran ovat tason yhtenevyyskuvauksia. Jokainen tason yhtenevyyskuvaus f on yhdistetty kuvaus näistä. Tarkemmin: On olemassa kulma $\varphi \in [0,2\pi[$ ja vektori $t \in \mathbb{R}^2$, jolle*
$$f = k_\varphi \circ s_t$$
tai
$$f = p \circ k_\varphi \circ s_t.$$

Todistus. Lemmojen perusteella tiedetään jo, että p, k_φ ja s_t ovat yhtenevyyskuvauksia, kun $\varphi \in [0,2\pi[$ ja $t \in \mathbb{R}^2$.

Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yhtenevyyskuvaus. Tällöin aiemman lemman perusteella $f = g \circ s_t$ jollakin origon kiinnittävällä yhtenevyyskuvauksella g ja siirrolla $s_t \quad (t \in \mathbb{R}^2)$. Kuvauksesta g on todettu, että jollakin $\theta \in [0,2\pi[$ pätee $g(1,0) = (\cos\theta, \sin\theta)$ ja $g(0,1) = \pm(-\sin\theta, \cos\theta)$. Jos $g(0,1) = (-\sin\theta, \cos\theta)$, niin merkitään $h = g$ ja $\varphi = \theta$. Jos taas $g(0,1) = (\sin\theta, -\cos\theta)$, niin merkitään $h = p \circ g$ ja $\varphi = -\theta$. Molemmissa tapauksissa
$$\begin{aligned} h(0,0) &= (0,0)\\ h(1,0) &= (\cos\varphi, \sin\varphi)\\ h(0,1) &= (-\sin\varphi, \cos\varphi), \end{aligned}$$
kuten osoitamme: Edellisessä tapauksessa väite on triviaali. Jälkimmäisessä taas
$$\begin{aligned} h(0,0) &= p(g(0,0)) = p(0,0) = (0,0),\\ h(1,0) &= p(g(1,0)) = p(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos\theta, -\sin\theta)\\ &= (\cos(-\theta), \sin(-\theta)) = (\cos\varphi, \sin\varphi),\\ h(0,1) &= p(g(0,1)) = p(\sin\theta, -\cos\theta) = (\sin\theta, \cos\theta)\\ &= (\sin\varphi, \cos\varphi). \end{aligned}$$

Nämä ehdot täyttävä yhtenevyyskuvaus on kierto eli $h = k_\varphi$. Siis joko
$$f = g \circ s_t = h \circ s_t = k_\varphi \circ s_t$$
tai
$$\begin{aligned} f &= g \circ s_t = \mathrm{id} \circ g \circ s_t = (p \circ p) \circ g \circ s_t\\ &= p \circ (p \circ g) \circ s_t = p \circ h \circ s_t = p \circ k_\varphi \circ s_t. \end{aligned}$$
$\square$

Lause 2.23. *Tason* $\mathbb{R}^2$ *yhtenevyyskuvausten ryhmällä* $(\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2), \circ)$ *on seuraavanlaisia aliryhmiä:*

1) $(G_0, \circ)$*, missä* $G_0 = \{\mathrm{id}, p\}$.

2) $(G_1, \circ)$*, missä* $G_1 = \{\, k_\varphi \mid \varphi \in [0, 2\pi[\,\}$.

3) $(G_2, \circ)$*, missä* $G_2 = \{\, s_t \mid t \in \mathbb{R}^2 \,\}$.

Todistus. G_0, G_1 ja G_2 ovat suljettuja kuvausten yhdistämisen suhteen, sillä

$$p \circ p = \mathrm{id},$$
$$k_\varphi \circ k_\alpha = k_{\varphi+\alpha}$$

ja

$$s_t \circ s_u = s_{t+u},$$

kun $\varphi, \alpha \in [0, 2\pi[$, $s, t \in \mathbb{R}^2$ ja on merkitty $k_\theta = k_{\theta-2\pi}$, kun $\theta \geq 2\pi$. Nämä ovat suljettuja käänteiskuvausten suhteen, sillä $p^{-1} = p$, $k_\varphi^{-1} = k_{2\pi-\varphi}$ ja $s_t^{-1} = s_{-t}$. □

2.5 Symmetria

Määritelmä 2.24. Olkoon $K \subseteq \mathbb{R}^2$ tasokuvio. Kuvion K *symmetriaryhmä* on $(\mathrm{Sym}(K), \circ)$, missä $\mathrm{Sym}(K)$ on niiden tason yhtenevyyskuvausten f joukko, joille

$$f[K] = \{\, x) \mid x \in K \,\} = K.$$

$\mathrm{Sym}(K)$:n alkioita kutsutaan K:n *symmetriakuvauksiksi*.

Lause 2.25. *Kuvion* $K \subseteq \mathbb{R}^2$ *symmetriaryhmä on ryhmä.*

Todistus. Pitää siis osoittaa, että $(\mathrm{Sym}(K), \circ)$ on kaikkien yhtenevyyskuvausten aliryhmä.

- $\mathrm{Sym}(K) \neq \emptyset$, sillä $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \in \mathrm{Sym}(K)$.
- $\mathrm{Sym}(K)$ on yhdistämisen suhteen suljettu, sillä $f, g \in \mathrm{Sym}(K)$

$$(f \circ g)[K] = f[g[K]] = f[K] = K.$$

- Lisäksi f^{-1} on yhtenevyyskuvaus, jolle

$$f^{-1}[K] = f^{-1}[f[K]] = K,$$

koska f on bijektio.

Siis olemme osoittaneet, että kyseessä on aliryhmä. □

Esimerkki 2.26. Olkoon $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ kolmion kärjet ja $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ vastaava kolmio. Olkoon $f \in \mathrm{Sym}(\Delta)$. Koska f säilyttää välissäolorelaation, niin

$$f[\{abc\}] = \{abc\}.$$

Siis

$$\sigma := f \restriction \{abc\} \colon \{abc\} \to \{abc\}$$

on joukon $\{abc\}$ permutaatio. Laskuharjoitustehtävästä seuraa, että σ määrää f:n. Siis jos $g \in \mathrm{Sym}(\Delta)$ ja $g \restriction \{abc\} = \sigma$, niin $g = f$.

Edelleen havaitaan, että $(G, \circ)$ on joukon $\{abc\}$ permutaatioryhmä, missä

$$G = \{\, f \restriction \{abc\} \mid f \in \mathrm{Sym}(\Delta) \,\}.$$

Koska $f \restriction \{abc\}$ määrää kuvauksen $f \in \mathrm{Sym}(\Delta)$, niin

$$|\mathrm{Sym}(\Delta)| = |G| \leq 6.$$

Symmetrioiden lukumäärä riippuu sivujen pituuksista seuraavasti:

1) Jos kaikki sivut ovat eri pituisia, niin jokaisella $f \in \mathrm{Sym}(\Delta)$ pätee välttämättä $f(a) = a, f(b) = b$ ja $f(c) = c$, joten
$$\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\} = \mathrm{Sym}(\Delta).$$
Siis symmetrioiden lukumäärä on 1.

2) Oletetaan, että Δ on tasakylkinen, mutta ei tasasivuinen. Oletetaan, että ab on kanta ja ac, bc kyljet. Siis $ac \equiv bc \not\equiv ab$. Tällöin laskuharjoitusten perusteella on olemassa kuvaus $f \in \mathrm{Sym}(\Delta)$, jolle $f(a) = f(b), f(b) = f(a)$ ja $f(c) = c$. Pisteitä ei myöskään voida permutoida muilla epätriviaaleilla tavoille. Siis $\mathrm{Sym}(\Delta) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, f\}$.

3) Oletetaan, että Δ on tasasivuinen. Tällöin mille tahansa joukon $\{abc\}$ permutaatiolle σ pätee
$$ab \equiv \sigma(a)\sigma(b), \quad ac \equiv \sigma(a)\sigma(c), \quad bc \equiv \sigma(b)\sigma(c).$$
Harjoitustehtävän perusteella kukin näistä voidaan laajentaa yhtenevyyskuvaukseksi. Symmetrioita on siis 6 kappaletta.

Lause 2.27. *Olkoon $K \subseteq \mathbb{R}^2$ epätyhjä tasokuvio, jonka symmetriaryhmä sisältää epätriviaalin siirron. Tällöin K on rajoittamaton eli se sisältää mielivaltaisen etäällä toisistaan olevia pisteitä.*

Todistus. Olkoon $t \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, jolle $s_t \in \mathrm{Sym}(K)$. Valitaan sitten $a \in K$. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$

$$s_t^n = s_t \circ \cdots \circ s_t = s_{nt},$$

joten

$$s_t^n(a) = s_{nt}(a) = a + nt \in K.$$

Siis kaikki pisteet $a + nt$, missä $n \in \mathbb{N}$ ovat kuvion K pisteitä ja $|s_t^n(a) - a| = |nt|$ on rajoittamaton. $\square$

Esimerkki 2.28. Aiemmin on todettu, että siirrot muodostavat aliryhmän. Merkitään $S = \{ t \mid t \in \mathbb{R}^2 \}$. Siirtojen ryhmä $(S, \circ)$ ei ole kuitenkaan minkään joukon symmetriaryhmä: Olkoon $K \subseteq \mathbb{R}^2$, $K \neq \emptyset$. Valitaan $a \in K$. Kaikille $t \in \mathbb{R}^2$ pätee $s_{t-a} \in S$, joten

$$t = a + t - a = s_{t-a}(a) \in K.$$

Nyt jos $S \subseteq \mathrm{Sym}(K)$, niin $K = \emptyset$ tai $K = \mathbb{R}^2$. Kuitenkin $(\mathrm{Sym}(\mathbb{R}^2), \circ) = (\mathrm{Sym}(\emptyset), \circ)$ on kaikkien yhtenevyyskuvausten joukko, joten $S \neq \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Sym}(\emptyset)$.

Huomautus 2.29. r_φ ja p ovat *lineaarikuvauksia* eli kun $x, y \in \mathbb{R}^2$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$, niin

$$r_\varphi(x + y) = r_\varphi(x) + r_\varphi(y), \quad r_\varphi(\lambda x) = \lambda r_\varphi(x)$$

ja

$$p(x + y) = p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

Käytämme tätä tulosta seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 2.30. Lasketaan x-akselin $X = \{ x_0, 0) \mid x_0 \in \mathbb{R} \}$ symmetriat.

Jokaiselle yhtenevyyskuvaukselle f on esitys

$$f = r_\varphi \circ s_t$$

tai

$$f = p \circ r_\varphi \circ s_t,$$

missä $t \in \mathbb{R}^2, \varphi \in [0, 2\pi[$.

Ensiksi havaitaan, että kun $t = (t_0, 0)$ jollakin $t_0 \in \mathbb{R}$, niin kaikilla $x \in \mathbb{R}$

$$s_t(x, 0) = (x, 0) + (t_0, 0) = (x + t_0, 0)$$

ja

$$(p \circ s_t)(x, 0) = p(s_t(x, 0)) = (x + t_0, 0).$$

Siis tällöin $s_t[X] \subseteq X$ ja $(p \circ s_t)[X] \subseteq X$. Kun otetaan huomioon, että $s_t^{-1} = s_{-t}$, missä $-t = (-t_0, 0)$ ja

$$(p \circ s_t)^{-1} = s_t^{-1} \circ p^{-1} = s_{-t} \circ p = p \circ s_{-t}$$

saadaan myös

$$s_t^{-1}[X] \subseteq X \Rightarrow X \subseteq s_t[X]$$

ja

$$(p \circ s_t)^{-1}[X] \subseteq X \Rightarrow X \subseteq (p \circ s_t)[X] \Rightarrow s_t[X] = X, \quad (p \circ s_t)[X] = X.$$

Merkitään nyt $f = r_\varphi \circ s_t$. Kuvauksen r_φ lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned} f(1,0) - f(0,0) &= r_\varphi(s_t(1,0)) - r_\varphi(s_t(0,0)) \\ &= r_\varphi(s_t(1,0) - s_t(0,0)) = r_\varphi((t + (1,0)) - (t + (0,0))) \\ &= r_\varphi(1,0) = (\cos\varphi, \sin\varphi). \end{aligned}$$

Jos $\sin\varphi \neq 0$, niin jompikumpi pisteistä $f(1,0)$ tai $f(0,0)$ ei ole x-akselilla, joten $f \notin \mathrm{Sym}(X)$.

Jos $\sin\varphi = 0$ ja $\varphi \in [0,2\pi[$, niin $\varphi = 0(\Rightarrow r_\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ tai $\varphi = \pi$. Oletetaan siis, että $\varphi = \pi$. Nyt $r_\pi(x_0,x_1) = (-x_0,-x_1)$. Siis $f \in \mathrm{Sym}(X)$.

Käsitellään vastaavasti tapaus $f = \underbrace{p \circ r_\varphi}_{\text{lineaarinen}} \circ s_t$. Nyt kuvauksien p ja r_φ lineaarisuuden tähden

$$
\begin{aligned}
f(1,0) - f(0,0) &= p(r_\varphi(s_t(1,0))) - p(r_\varphi(s_t(0,0))) = p(r_\varphi(t+(1-0))) - p(r_\varphi(t)) \\
&= p(r_\varphi(t+(1,0)) - r_\varphi(t)) = p(r_\varphi(t+(1,0)-t)) = p(r_\varphi(1,0)) \\
&= p(\cos\varphi, \sin\varphi) = (\cos\varphi, -\sin\varphi).
\end{aligned}
$$

Jos $\varphi \neq 0, \pi$, niin $f \notin \mathrm{Sym}(X)$. Kuitenkin $p \circ r_\pi \circ s_t \in \mathrm{Sym}(X)$. Siis

$$\mathrm{Sym}(X) = \{\, t, p \circ s_t, r_\pi \circ s_t, p \circ r_\pi \circ s_t \mid t = (t_0,0), t_0 \in \mathbb{R} \,\}.$$

Symmetriaryhmän siis virittävät x-akselin suuntaiset siirrot, peilaus p_x ja kierto k_π.

2.6 Yhtenevyyskuvausten esittäminen kompleksilukujen avulla

Merkitään $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\,(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\,\}$ ja $\mathrm{i} := (0,1)$. Jos $t \in \mathbb{R}$, niin samaistetaan se alkioon $(t,0) \in \mathbb{C}$ eli $t = (t,0)$. Määritellään tavalliseen tapaan kompleksiluvuille

$$(a,b) + (x,y) := (a+x, b+y), \quad (a,b)\cdot(x,y) := (ax - by, ay + bx).$$

Oletetaan tunnetuksi seuraava identiteetti

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi,$$

kun $\varphi \in \mathbb{R}$. Tällöin voimme esittää jokaisen luvun muodossa

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad w = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi},$$

missä $r, R \geq 0, \varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Nyt

$$zw = (rR)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}.$$

Siirto:

$$s_t\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, s_t(z) = z + t.$$

Kierto:

$$r_\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, r_\varphi(z) = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Peilaus:

$$p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, p(z) = \overline{z} := x - \mathrm{i}y,$$

kun $z = x + \mathrm{i}y$.

Tarkastellaan sovelluksena yhtenevyyskuvausten kiintopisteitä.

Määritelmä 2.31. Alkio $a \in A$ on kuvauksen $f\colon A \to A$ *kiintopiste*, jos $f(a) = a$.

Kierto kulman φ verran kiintopisteen z_0 ympäri:

Olkoon $t \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Piste z on yhtenevyyskuvauksen

$$f = r_\varphi \circ s_t$$

kiintopiste, jos ja vain jos

$$\begin{aligned} f(z) = z &\Leftrightarrow r_\varphi(s_t(z)) = z \Leftrightarrow r_\varphi(t+z) = z \\ &\Leftrightarrow (t+z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = z \Leftrightarrow t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = z - z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \\ &\Leftrightarrow te^{\mathrm{i}\varphi} = z(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}). \end{aligned}$$

Oletetaan, että $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = 0$ eli $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = 1$ eli $\varphi = 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. Nyt, jos lisäksi $t = 0$, niin $f = \mathrm{id}_\mathbb{C}$ ja kaikki pisteet ovat kiintopisteitä. Jos $t \neq 0$, niin $f = s_t$ ja sillä ei ole kiintopisteitä. Oletetaan sitten, että $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \neq 1$. Tällöin

$$f(z_0) = z_0 \Leftrightarrow t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = z_0(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) \Leftrightarrow z_0 = \frac{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}.$$

Joten kuvauksella on täsmälleen yksi kiintopiste.

Kun $z \in \mathbb{C}$, niin

$$\begin{aligned} f(z) = r_\varphi(s_t(z)) &= (z+t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = ((z-z_0)+(z_0+t))\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \\ &= (z-z_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + (z_0+t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = (z-z_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + f(z_0) \\ &= (z-z_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + z_0. \end{aligned}$$

Siis

$$f(z) - z_0 = (z-z_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Kuvaus f on *kierto kulman φ verran kiintopisteen z_0 ympäri.*

Peilaus suoran l suhteen:

Toinen yhtenevyyskuvausten luokka on kuvaukset

$$f = p \circ r_\varphi \circ s_t.$$

Jos $z \in \mathbb{C}$ on f:n kiintopiste, niin

$$(f \circ f)(z) = f(f(z)) = f(z) = z$$

eli z on myös kuvauksen $f \circ f$ kiintopiste. Tällöin

$$\begin{aligned}
z &= f(f(z)) = f((p \circ r_\varphi \circ s_t)(z)) = f(\overline{(z+t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}) \\
&= \overline{(\overline{(z+t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} + t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \overline{(\overline{z}+\overline{t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \\
&= \overline{\overline{z}+\overline{t}+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = z + t + \overline{t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = s_{t'}(z),
\end{aligned}$$

missä $t' = t + \overline{t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$.

Siis jos $t' \neq 0$, niin $f \circ f$:llä ei ole kiintopisteitä $\Rightarrow$ f:llä ei ole kiintopisteitä. Oletetaan siis, että $t' = 0$ eli

$$\begin{aligned}
& t + \overline{t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = 0 \\
\Leftrightarrow & t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} + \overline{t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} = 0 \quad (\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}) \\
\Leftrightarrow & t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} + \overline{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}} = 0 \\
\Leftrightarrow & \exists y \in \mathbb{R} : t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} = y\mathrm{i} \\
\Leftrightarrow & \exists y \in \mathbb{R} : t = y\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

Kun $z \in \mathbb{C}$, niin

$$\begin{aligned}
f(z) &= (\overline{z}+\overline{t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = \overline{z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} + \overline{t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\
&= \overline{z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} + \underbrace{\left(\frac{\overline{t}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \frac{t}{2}\right)}_{\text{oletus}} = \left(\overline{z} + \frac{\overline{t}}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} - \frac{t}{2} \\
&= \overline{z + \frac{t}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} - \frac{t}{2} = p(r_{\frac{\varphi}{2}}(s_{\frac{t}{2}}(z)))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} - \frac{t}{2} \\
&= s_{\frac{t}{2}}(r_{\frac{\varphi}{2}}^{-1}(p(r_{\frac{\varphi}{2}}(s_{\frac{t}{2}}(z))))).
\end{aligned}$$

Siis

$$f = (r_{\frac{\varphi}{2}} \circ s_{\frac{t}{2}})^{-1} \circ p \circ (r_{\frac{\varphi}{2}} \circ s_{\frac{t}{2}}).$$

Nyt piste $z \in \mathbb{C}$ on f:n kiintopiste täsmälleen silloin, kun

$$\begin{aligned}
& z = (r_{\frac{\varphi}{2}} \circ s_{\frac{t}{2}})^{-1} \circ p \circ (r_{\frac{\varphi}{2}} \circ s_{\frac{t}{2}})(z) \\
\Leftrightarrow & p \circ (r_{\frac{\varphi}{2}} \circ s_{\frac{t}{2}})(z) = (r_{\frac{\varphi}{2}} \circ s_{\frac{t}{2}})(z) \\
\Leftrightarrow & (r_{\frac{\varphi}{2}} \circ s_{\frac{t}{2}})(z) \text{ on kiintopiste peilauksessa } p \\
\Leftrightarrow & (r_{\frac{\varphi}{2}} \circ s_{\frac{t}{2}})(z) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Siis on olemassa $x \in \mathbb{R}$, jolle

$$x = (r_{\frac{\varphi}{2}} \circ s_{\frac{t}{2}})(z) = (z + \frac{t}{2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}$$

eli

$$z = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} - \frac{t}{2}.$$

Kuvauksen f kiintopisteet siis muodustaa siis tässä tapauksessa suoran

$$l := \left\{ x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} - \frac{t}{2} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Kuvausta f kutsutaan tässä tapauksessa *peilaukseksi suoran l suhteen*. Muut yhtenevyyskuvaukset saadaan yhdistettyinä kuvauksina peilauksista (kolme riittää, HT).

Lause 2.32. *Olkoon f tason yhtenevyyskuvaus, jolla on kiintopisteitä. Tällöin täsmälleen yksi seuraavista pätee:*

1) $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ ja jokainen taso piste on sen kiintopiste.

2) f on kierto jonkin pisteen z_0 suhteen ja tämä kiertokeskus z_0 on f:n ainoa kiintopiste.

3) f on peilaus jonkin suoran l suhteen ja täsmälleen tämän suoran pisteet ovat f:n kiintopisteitä.

Todistus. Lause on yllä olevan tarkastelun seuraus. □

Esimerkki 2.33. Yhtenevyyskuvaus $f = p \circ s_1$ on esimerkki yhtenevyyskuvauksesta, joka ei ole siirto, mutta jolla ei ole myöskään kiintopisteitä. Kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee nimittäin

$$f(z) = \overline{z+1} = \overline{z} + 1$$

ja siis

$$(f \circ f)(z) = \overline{\overline{z+1}+1} = z + 2 \neq z.$$

Lisäksi

$$\mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(z) + 1,$$

joten kyseessä ei ole siirto.

Lause 2.34. *Olkoon K tasokuvio. Merkitään jokaisella yhtenevyyskuvauksella f*

$$\mathrm{Fix}(f) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid f(z) = z \,\}.$$

Tällöin K:n symmetriaryhmän alkioiden yhteisten kiintopisteiden joukko

$$\bigcap_{f \in \mathrm{Sym}(K)} \mathrm{Fix}(f)$$

on joko tyhjä, yksiö, suora tai koko taso.

Todistus. Oletetaan, että
$$\bigcap_{f \in \mathrm{Sym}(K)} \mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset.$$
Tällöin jokaisella K:n symmetrikuvauksella f on kiintopisteitä, joten $\mathrm{Fix}(f)$ on taso, suora tai yksiö. Jos jollain $f \in \mathrm{Sym}(K)$ pätee $\mathrm{Fix}(f) = \{a\}$, niin
$$\bigcap_{f \in \mathrm{Sym}(K)} \mathrm{Fix}(f) = \{a\}.$$
Myös leikkaavien suorien leikkausjoukko on yksiö. Myös tapaukset, joissa on vain $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ kuuluu symmetriaryhmään tai lisäksi myös jokin peilaus kuuluu symmetriaryhmään ovat mahdollisia. Tällöin edellisessä olemme tapauksessa
$$\bigcap_{f \in \mathrm{Sym}(K)} \mathrm{Fix}(f) = \text{taso}$$
ja jälkimmäisessä
$$\bigcap_{f \in \mathrm{Sym}(K)} \mathrm{Fix}(f) = \text{suora}.$$
□

Määritelmä 2.35. Olkoon K tasokuvio. Jos jollakin pisteellä $a \in \mathbb{C}$ pätee
$$\bigcap_{f \in \mathrm{Sym}(K)} \mathrm{Fix}(f) = \{a\},$$
niin pistettä a kutsutaan kuvion K *symmetriakeskipisteeksi* eli *symmetria-keskukseksi*. Jos jollakin suoralla $l \subseteq \mathbb{C}$ pätee,
$$\bigcap_{f \in \mathrm{Sym}(K)} \mathrm{Fix}(f) = l,$$
niin suoraa l kutsutaan kuvion K *symmetria-akseliksi*.

Esimerkki 2.36. Olkoon l tason suora. Tällöin l:llä ei ole symmetriakeskusta eikä -akselia. Olkoon $z, w \in l, z \neq w$. Nyt
$$s_{z-w} \in \mathrm{Sym}(l).$$
Koska s_{z-w} on epätriviaali siirto, niin sillä ei ole kiintopisteitä. Siis
$$\mathrm{Fix}(s_{z-w}) = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{f \in \mathrm{Sym}(l)} \mathrm{Fix}(f) = \emptyset.$$

Määritelmä 2.37. Tason yhtenevyyskuvaus f on *peilaus*, jos
$$f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \quad f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{C}}.$$

Peilaus ei voi olla siirto s_t. Kuvauksista $r_\varphi \circ s_t$ todettiin, että ne ovat kiertoja jonkin pisteen z_0 suhteen, kun $]0, 2\pi[$. Tälläiselle yhtenevyyskuvaukselle $f = r_\varphi \circ s_t$ pätee

$$f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \varphi = \pi :$$

Jokaisella $z \in \mathbb{C}$ pätee

$$f(z) = z_0 + (z - z_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

joten

$$(f \circ f)(z) = z_0 + (z - z_0)\mathrm{e}^{2\pi i}.$$

Siis $f \circ f$ on kierto pisteen z_0 suhteen, paitsi jos $2\varphi = 2\pi$ eli $\varphi = \pi$. Kuvaus $f = f_\pi \circ s_t$ on siis tällöin *peilaus pisteen* z_0 *suhteen*. Tällöin

$$f(z) = z_0 + (z - z_0)\mathrm{e}^{i\pi} = z_0 + (z - z_0)(-1) = 2z_0 - z.$$

Muotoa $f = p \circ r_\varphi \circ s_t$ olevalle yhtenevyyskuvaukselle pätee aina $f \circ f = s_u$ jollakin $u \in \mathbb{C}$. Aiemmin jo todettiin, että jos $u = 0$, niin f on peilaus jonkin suoran l suhteen.

Millaisia symmetriaominaisuuksia on rajoitetulla tasokuvioilla? $K \subseteq \mathbb{R}^2$ on *rajoitettu*, jos se sijaitsee jonkin ympyrän sisäpuolella.

Lemma 2.38. *Rajoitetun tasokuvion symmetriaryhmässä on identtisen kuvauksen lisäksi vain kiertoja ja peilauksia.*

Todistus. Olkoon $K \subseteq \mathbb{R}^2$ rajoitettu ja $f \in \mathrm{Sym}(K)$, $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Tällöin aiemman tuloksen mukaan f ei voi olla siirto. Lisäksi tiedetään, että jos $f = r_\varphi \circ s_t$, niin f on kierto. Jos taas $f = p \circ r_\varphi \circ s_t$ joillakin $\varphi \in [0, 2\pi[$ ja $t \in \mathbb{R}^2$, niin $f \circ f$ on siirto. Koska $(\mathrm{Sym}(K), \circ)$ on ryhmä, niin $f \circ f \in \mathrm{Sym}(K)$. Toisaalta tiedetän, että symmetria-ryhmässä ei ole epätriviaaleja siirtoja. Siis $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, joten f on peilaus. □

Lemma 2.39. *Olkoon $K \subseteq \mathbb{R}^2$ rajoitettu. Olkoot f kierto, jonka kiertokeskus on a ja g kierto, jonka kiertokeskus on b. Jos $f, g \in \mathrm{Sym}(K)$, niin $a = b$.*

Todistus. Tehdään vastaoletus, että a ja b ovat eri pisteitä. Merkitään l:llä pisteen a kautta kulkevaa suoraa, jota kohti jana ab on kohtisuorassa. Merkitään vastaavasti l':lla sellaista pisteen b kautta kulkevaa suoraa, jota kohti jana ab on kohtisuorassa.

Ensiksi havaitaan, että jos z ei ole suoralla l, niin on olemassa sellainen $k \in \mathbb{Z}$, että $f^k(z)$ on eri puolella suoraa kuin z. Vastaava havainto pätee myös l':lle ja g:lle. Koska $(\mathrm{Sym}(K), \circ)$ on ryhmä, niin kaikilla $k \in \mathbb{Z}$ $f^k \in \mathrm{Sym}(K)$. Siis erityisesti, jos $z \in K$, niin $f^k(z)K$. Valitaan $z_0 \in K$. Voidaan olettaa, että z_0 on suoran l vasemmalla puolella. Määritellään pistejono (z_n) seuraavasti:

- Jos $n = 2(m + 1), m \in \mathbb{N}$: Valitaan $k \in \mathbb{Z}$ siten, että $z_{n+1} := g^k(z_n)$ on eri puolella suoraa l' kuin piste z_n.
- Jos $n = 2m + 1, m \in \mathbb{N}$: Valitaan $k \in \mathbb{Z}$ siten, että $z_{n+1} := f^k(z_n)$ on eri puoella suoraa l kuin piste z_n.

Nyt $z_i \in K$ jokaisella $i \in \mathbb{N}$. Tarkastellaan lukuja $\lambda_m = |z_m - a|^2 + |z_n - b|^2$. Merkitään $d := |a - b|$. Oletetaan, että n on parillinen. Merkitään $\varphi = \measuredangle abz_m$ ja $\varphi' = \measuredangle abz_{m+1}$. Siis

$$0 < \varphi < \pi/2 < \varphi' < \frac{3\pi}{2}.$$

Merkitään $r := |z_n - b| = |z_{n+1} - b|$, missä yhtäsuuruus seuraa siitä, että g on kierto pisteen b ympäri (samoin on $g^k, k \in \mathbb{Z}$). Kosinilauseen mukaan

$$|z_n - 1|^2 = d^2 + r^2 - 2dr\cos\varphi < r^2 - d^2,$$

missä arvio saadaan siitä, että $\varphi \mapsto \cos\varphi$on aidosti vähenevä, kun $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, ja koska z_n on suoran l vasemmalla puolella, ja ääritapauksessa muodostuu suorakulmainen kolmio, jolla on hypotenuusa r ja kateetti d. Toisaalta

$$|z_{n+1} - a|^2 = d^2 + r^2 - 2rd\cos\varphi' > d^2 + r^2 \quad (\frac{\pi}{2} < \varphi' < \frac{3\pi}{2}).$$

Siis

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1} - \lambda_n &= |z_{n+1} - a|^2 + |z_{n+1} - b|^2 - (|z_n - a|^2 + |z_n - b|^2)\\ &= |z_{n+1} - a|^2 - |z_n - a|^2\\ &> d^2 + r^2 - (r^2 - d^2) = 2d^2.\end{aligned}$$

Sama arvio pätee myös parittomille $n \in \mathbb{N}$. Siis $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ vaikka $z_n \in K$. Tämä on ristiriita sen kanssa, että K olisi rajoitettu. □

Lemma 2.40. *Olkoon $K \neq \emptyset$ rajoitettu pistejoukko, f epätriviaali kierto pisteen a ympäri ja $p_l, p_{l'}$ peilauksia suorien l ja l' suhteen. Tällöin*

1) Jos $f, p_l \in \mathrm{Sym}(K)$, niin piste a on suoralla l.

2) Jos $p_l, p_{l'} \in \mathrm{Sym}(K)$, $l \neq l'$, niin l ja l' eivät ole yhdensuuntaisia eli ne leikkaavat.

Todistus. Sivuutetaan (HT). □

Lause 2.41. *Olkoon $K \neq \emptyset$ rajoitettu tasokuvio. Oletetaan, että K:lla on epätriviaali symmetriaryhmä, ts. on olemassa sellainen $f \in \mathrm{Sym}(K)$, että $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Tällöin K:lla on joko symmetriakeskus tai symmetria-akseli.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathrm{Sym}(K)$ sisältää epätriviaaleja kiertoja. Olkoon $f \in \mathrm{Sym}(K)$ tälläinen ja a sen symmetriakeskus. Olkoon $g \in \mathrm{Sym}(K)$ mielivaltainen. Jos $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, niin a on sen kiintopiste. Muutoin g on kierto tai peilaus suoran suhteen. Molemmissa tapauksissa edellisten lemmojen mukaan a on sen kiintopiste. Siis

$$\bigcap_{f\in\mathrm{Sym}(K)} \mathrm{Fix}(f) = \{a\}.$$

Oletetaan sitten, että $\mathrm{Sym}(K)$ ei sisällä epätriviaaleja kiertoja. Nyt valitaan $f \in \mathrm{Sym}(K)$, $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Siis jollakin suoralla l pätee $f = p_l$. Itseasiassa $\mathrm{Sym}(K) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, p_l\}$, sillä jos pätisi $p_{l'} \in \mathrm{Sym}(K)$, niin l ja l' leikkaisivat yhdessä pisteessä tai olisivat samat. Edellisessä $p_l \circ p_{l'}$ olisi kierto leikkauspisteen suhteen (HT), mikä on ristiriita. □

2.7 Yhdenmuotoisuuskuvauksista

Määritelmä 2.42. Kuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on *yhdenmuotoisuuskuvaus* (eli *similariteetti*), jos on olemassa sellainen $\lambda > 0$, että kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^2$ pätee

$$|f(x) - f(y)| = \lambda\,|x - y|\,.$$

Esimerkki 2.43 (Homotetia pisteen suhteen)**.** Tyypillinen esimerkki yhdenmuotoisuuskuvauksesta on *homotetia pisteen a suhteen suhteessa* $\lambda > 0$, ts.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x) = a + \lambda(x - a).$$

Lause 2.44. *Tason yhdenmuotoisuuskuvaukset muodostavat ryhmän kuvausten yhdistämisellä varustettuna.*

Todistus. Kuten yhtenevyyskuvauksille (sivuutetaan). □

Määritelmä 2.45. Olkoot $\Gamma, \Pi \subseteq \mathbb{R}^2$ tasokuvioita. Γ ja Π ovat *yhtenevät*, jos on olemassa yhtenevyyskuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle $f(\Gamma) = \Pi$. Tällöin merkitään $\Gamma \cong \Pi$. Γ ja Π ovat *yhdenmuotoiset*, jos on olemassa yhdenmuotoisuuskuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle $f(\Gamma) = \Pi$. Tällöin merkitään $\Gamma \sim \Pi$.

Määritelmä 2.46. *Tason homotetia pisteen a suhteen skaalauksella* $\lambda \neq 0$ on kuvaus

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x) = a + \lambda(x - a).$$

Homotetiat ovat esimerkkejä yhdenmuotoisuuskuvauksista, sillä kaikille $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$|f(x) - g(x)| = |\lambda(x - a) - \lambda(y - a)| = |\lambda|\,|x - y|\,.$$

Toisaalta jos $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on yhdenmuotoisuuskuvaus, jonka skalaarikerroin on $\lambda > 0$ ja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on homotetia origon suhteen, jolla on sama skaalauskerroin λ, niin

$$f^{-1} \circ g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

on yhtenevyyskuvaus: Kun $x, y \in \mathbb{R}^2$, niin

$$\begin{aligned} \left|(f^{-1} \circ g)(x) - (f^{-1} \circ g)(y)\right| &= \lambda^{-1}\,|g(x) - g(y)| \\ &= \lambda^{-1}\lambda\,|x - y| = |x - y|\,. \end{aligned}$$

Kun merkitään $h = f^{-1} \circ g$, niin

$$f \circ h = f \circ (f^{-1} \circ g) = g.$$

Lause 2.47. *Jokainen yhdenmuotoisuuskuvaus $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ voidaan esittää muodossa $g = f \circ h$, missä f on homotetia origon suhteen ja h on yhtenevyyskuvaus.*

Todistus. Todistettiin edellä. □

2.8 Pinta-ala

Olkoon $M \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, missä M on äärellisten yhdisteiden suhteen suljettu ja $\emptyset \in M$ (ts. M koostuu tasokuvioista). *Pinta-alalla* tarkoitetaan *äärellisesti additiivista mittaa* eli kuvausta $A\colon M \to [0,\infty[$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

1) $A(\emptyset) = \emptyset$.

2) Kun $\Gamma, \Pi \in M$, niin
$$\Gamma \subseteq \Pi \Rightarrow A(\Gamma) \leq A(\Pi).$$

3) Kun $\Gamma, \Pi \in M$, niin
$$\Gamma \cap \Pi = \emptyset \Rightarrow A(\Gamma \cup \Pi) = A(\Gamma) + A(\Pi).$$

4) Yhtenevien tasokuvioiden pinta-alat ovat samat, jos ne ovat määriteltyjä. Siis kun $\Gamma, \Pi \in M$, niin
$$\Gamma \cong \Pi \Rightarrow A(\Gamma) = A(\Pi).$$

5) *Yksikköneliön* pinta-ala on 1. Siis $A([0,1] \times [0,1]) = 1$.

Tässä ehdot 4-5 ovat geometriset vaatimukset. Vaaditaan lisäksi, että kokoelma M on suljettu yhtenevyyden suhteen, ja että se sisältää kaikki suljetut monikulmiot.

Toistaiseksi oletetaan, että pinta-alafunktio $A\colon M \to [0,\infty]$ on olemassa ja tutkitaan, mitä tästä seuraa. Pinta-alan olemassaolo voidaan periaatteessa osoittaa varsin järein matemaattisin asein. Lebesgue osoitti vuonna 1901, että on olemassa ns. Lebesguen mitta
$$m\colon \mathcal{L} \to [0,\infty[,$$
missä $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ on Lebesgue-mitallisten joukkojen perhe. $\mathcal{L}$ on ns. σ-algebra eli suljettu numeroituvien yhdisteiden ja komplementtien suhteen. $\mathcal{L}$ sisältää kaikki avoimet ja suljetut, ja välttämättä kaikki Borelin joukot. Voidaan osoittaa, että kaikki joukot eivät ole Lebesgue-mitallisia. Periaatteessa voitaisiin hyväksyä, että $A(\Gamma) = m(\Gamma)$, kun $m(\Gamma) < \infty$.

Lause 2.48. *Minkä tahansa janan pinta-ala on nolla.*

Todistus. Jos janan I pituus on 1, niin yksikköneliön N sisään voidaan sijoittaa mielivaltaisen monta I:n kanssa yhtenevää janaa. Jokaiselle $m \in \mathbb{Z}_+$ on siis olemassa janat $I_0, \ldots, I_m \subseteq N$, joille $I \cong I_k \cong I_l$ ja $I_k \cap I_l = \emptyset$, kun $k, l \in \{0, \ldots, m\}$ ja $l \neq k$. Siis
$$\begin{aligned} N &\supseteq \bigcup_{k=0}^{m} I_k \\ \Rightarrow & 1 = A(N) \geq A\left(\bigcup_{k=0}^{m} I_k\right) = \sum_{k=0}^{m} A(I_k) = (m+1)(A(I)) \\ \Rightarrow & A(I) \leq \frac{1}{m+1} \Rightarrow A(I) = 0. \end{aligned}$$

Jos I on mielivaltainen jana, niin se voidaan esittää äärellisenä ja erillisena yhdisteenä $I = \bigcup_{k=1}^{s} I_k$, missä I_k on osa yksikön pituisesta janasta. Siis

$$A(I) = \sum_{k=0}^{s} A(I_k) = 0.$$

□

Lause 2.49. *Suorakaiteen, jonka sivujen pituudet ovat a ja b, tilavuus on ab.*

Todistus. Edellisestä lauseesta seuraa, että suljetun suorakaiteen ja sen sisuksen pinta-alat ovat samat. Olkoon Γ suljettu suorakaide, jonka sivujen pituudet ovat $a, b \in \mathbb{Z}_+$. Jaetaan Γ yksikköneliöiksi N_{ij}, missä

$$i \in \{0, \ldots, a-1\} \text{ ja } j \in \{0, \ldots, b-1\}.$$

Yksikköneliöstä jätetään sivuja pois tai otetaan mukaan siten, että esitys

$$\Gamma = \bigcup_{i=0}^{a-1} \bigcup_{j=0}^{b-1} N_{ij}$$

on esitys erillisinä yhdisteinä. Tästä saadaan, että

$$A(\Gamma) = A\left(\bigcup_{i=0}^{a-1} \bigcup_{j=0}^{b-1} N_{ij}\right) = \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{j=0}^{b-1} A(N_{ij}) = ab.$$

Samalla idealla pystytään osoittamaan väite, kun $a, b \in \mathbb{Q}_+$. Nimittäin jokaisella $n \in \mathbb{Z}_+$ neliön, jonka sivu on $1/n$, pinta-ala on $1/n^2$. Tämä seuraa siitä, että yksikköneliö on erillinen yhdiste n^2:stä tälläisestä neliöstä, jotka leikkaavat vain sivuistaan.

Todistetaan nyt yleinen tulos. Olkoon $a, b > 0$. Tällöin jokaista $\varepsilon > 0$ kohti voidaan valita $a', a'', b', b'' \in \mathbb{Q}_+$, joille

$$a' < a < a'', \quad b' < b < b''$$

ja

$$ab - \varepsilon < a'b' < ab < a''b'' < ab + \varepsilon.$$

Tämä seuraa kertolaskun $(x, y) \mapsto xy$ jatkuvuudesta. Olkoon Γ suorakaide, jonka sivut ovat a ja b. Edellisen nojalla se sisältää suorakaiteen, jonka sivut ovat a' ja b'. Toisaalta se sisältyy suorakaiteeseen, jonka sivut ovat a'' ja b''. Siis $\Gamma' \subseteq \Gamma \subseteq \Gamma''$. Koska pinta-ala on monotoninen, niin

$$a'b' = A(\Gamma') \leq A(\Gamma) \leq A(\Gamma'') = a''b'',$$

sillä Γ':n ja Γ'':n sivut ovat rationaalipituisia. Siten

$$ab - \varepsilon < a'b' \leq A(\Gamma) \leq a''b'' < ab + \varepsilon.$$

Koska tämä pätee jokaiselle $\varepsilon > 0$, niin $A(\Gamma) = ab$. □

Lause 2.50. *Kun* $\Gamma, \Pi \in M$*, niin*

$$A(\Gamma \cup \Pi) = A(\Gamma) + A(\Pi) - A(\Gamma \cap \Pi).$$

Todistus.

$$\begin{aligned} A(\Gamma \cup \Pi) &= A((\Gamma \setminus \Pi) \cup (\Gamma \cap \Pi) \cup (\Pi \setminus \Gamma)) \\ &= A(\Gamma \setminus \Pi) + A(\Gamma \cap \Pi) + A(\Pi \setminus \Gamma) \\ &= (A(\Gamma \setminus \Pi) + A(\Gamma \cap \Pi) + A(\Pi \setminus \Gamma) + A(\Gamma \cap \Pi)) - A(\Gamma \cap \Pi) \\ &= A(\Gamma) + A(\Pi) - A(\Gamma \cap \Pi). \end{aligned}$$

□

Lause 2.51. *Jos* $\Pi_0, \dots, \Pi_m \in M$*, missä* $m \in \mathbb{N}$ *ja* $A(\Pi_i \cap \Pi_j) = 0$*, kun* $i, j \in \{0, \dots, m\}$*,* $i \neq j$*, niin*

$$A\left(\bigcup_{i=0}^{m} \Pi_i\right) = \sum_{i=0}^{m} A(\Pi_i).$$

Todistus. Tapaus $m = 0$ on triviaali. Tapauksessa $m = 1$ saadaan

$$A(\Pi_0 \cup \Pi_1) = A(\Pi_0) + A(\Pi_1) - \underbrace{A(\Pi_0 \cap \Pi_1)}_{=0} = A(\Pi_0) + A(\Pi_1).$$

Tästä väite yleistyy induktiolla. □

Lause 2.52. *Suorakulmaisen kolmion, jonka kateettien pituudet ovat* a *ja* b*, pinta-ala on* $ab/2$*.*

Todistus. Olkoon Δ tämä suorakulmainen kolmio. Nyt on olemassa sellainen Δ', että $\Delta' \cong \Delta$ ja $\Delta' \cap \Delta$ on Δ:n hypotenuusa. Tällöin $\Delta \cup \Delta'$ on suorakaide, jonka ala on ab. Siis

$$\begin{aligned} ab = A(\Delta \cup \Delta') &= A(\Delta) + \underbrace{A(\Delta')}_{=A(\Delta)} - \underbrace{A(\Delta \cap \Delta')}_{=0} = 2A(\Delta) \\ \Rightarrow A(\Delta) &= \frac{ab}{2}. \end{aligned}$$

□

Lause 2.53. *Kolmion pinta-ala on* $\frac{ah}{2}$*, missä* a *on yksi kolmion sivuista ja* h *sen vastainen korkeus.*

Todistus. Olkoon Δ kolmio ja a yhden sen sivun pituus. Jaetaan tarkastelu kolmeen tapaukseen sen mukaan, missä korkeusjana h sijaitsee.

1) Jos sivua a vastaava korkeusjana h on itsekkin kolmion sivu, niin Δ on suorakulmainen. Tällöin a ja h ovat sen kateetit, joten $A(\Delta) = \frac{ah}{2}$.

2) Oletetaan sitten, että sivua a vastaava korkeusjana h on kolmion Δ sisällä, mutta ei sivu. Jaetaan kolmio Δ nyt osiin Δ_0 ja Δ_1 siten, että h on molempien kolmioiden sivuna eli
$$\Delta = \Delta_0 \cup \Delta_1 \text{ ja } \Delta_0 \cap \Delta_1 = h.$$
Olkoon näitä vastaavat kateetit a_0 ja a_1, jolloin $a = a_0 + a_1$. Nyt
$$\begin{aligned} A(\Delta) &= A(\Delta_0 \cup \Delta_1) = A(\Delta_0) + A(\Delta_1) \\ &= \frac{a_0 h}{2} + \frac{a_1 h}{2} = \frac{(a_0 + a_1)h}{2} = \frac{ah}{2}. \end{aligned}$$

3) Oletetaan lopuksi, että sivua a vastaavat korkeusjana h on kolmion Δ ulkopuolella. Täydennetään Δ suorakulmaiseksi kolmioiksi lisäämällä siihen suorakulmainen kolmio Δ', jonka kateetit ovat korkeusjana h ja jana a', missä $a||a'$ (ohje: piirrä kuva). Nyt
$$\begin{aligned} &\frac{(a + a')h}{2} = A(\Delta \cup \Delta') = A(\Delta) + A(\Delta') = A(\Delta) + \frac{a'h}{2} \\ &\Rightarrow A(\Delta) = \frac{ah}{2}. \end{aligned}$$

□

Määritelmä 2.54. Suljetun monikulmion Π kolmioinnilla tarkoitetaan esitystä
$$\Pi = \bigcup_{i=0}^{m} \Delta_i \quad (m \in \mathbb{N}),$$
(tai muodollisemmin perhettä $\{ \Delta_i \mid i \in \{0, \ldots, m\} \}$) missä Δ_i:t ovat suljettuja kolmioita, jotka leikkaavat toisiaan korkeintaan sivuillaan.

Lause 2.55. *Jokainen yksinkertainen suljettu monikulmio voidaan kolmioida.*

Todistus. Todistetaan väite induktiolla yksinkertaisen suljetun monikulmion Π sivujen lukumäärän $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ suhteen. Perusaskel $n = 3$ on triviaali, sillä Π on kolmio. Oletetaan, että $n > 3$, ja että kaikki yksinkertaiset suljetut monikulmiot, joissa on vähemmän kuin n sivua voidaan kolmioida.

Etsitään Π:lle lävistäjä, joka on kokonaan Π:n sisällä. Valitaan kärjet a, b, c siten, että kolmio on sisältyvyyden suhteen minimaalinen. □

Määritelmä 2.56. Suljetun yksinkertaisen monikulmion Π *pinta-ala* on
$$A(\pi) = \sum_{i \in I} A(\Delta_i),$$
missä $\Pi = \bigcup_{i \in I} \Delta_i$ on Π:n kolmiointi ja kolmioiden pinta-alat $A(\Delta_i)$ lasketaan tavanomaisesti ($\frac{1}{2}$ × kanta × korkeus).

Määritelmä 2.57. Yksinkertaiset monikulmiot Γ ja Π ovat *yhtähajotettavat* (eng. *equidecomposable*), jos niillä on kolmioinnit $\Gamma = \bigcup_{i \in I} \Delta_i$ ja $\Pi = \bigcup_{i \in I} \Delta'_i$, joille pätee $\Delta_i \cong \Delta'_i$, kun $i \in I$.

Lause 2.58. *Yhtähajotettavuus on ekvivalenssirelaatio.*

Todistushahmotelma. Refleksiivisyys on selvä, koska yksinkertaiset monikulmiot voidaan kolmioida. Myös symmetrisyys on triviaali. Todistetaan sitten transitiivisuus.

Oletetaan, että Γ ja Π sekä Π ja Σ ovat yhtähajotettavat. On siis olemassa sellaiset kolmioinnit

$$\Gamma = \bigcup_{i \in i} \Delta_i, \quad \Pi = \bigcup_{i \in I} \Delta'_i$$

ja

$$\Pi = \bigcup_{j \in J} \Delta''_j, \quad \Sigma = \bigcup_{j \in J} \Delta^*_j,$$

että $\Delta_i \cong \Delta'_i$ ja $\Delta''_j \cong \Delta^*_j$ jokaisella $i \in I$ ja $j \in J$, missä indeksijoukot I ja J ovat äärellisiä.

Saadaan, että

$$\Pi = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (\Delta'_i \cap \Delta''_j),$$

jossa osa leikkauksista voi olla tyhjiä. Poistetaan tästä esityksestä ne leikkaukset, jotka ovat tyhjiä. Loput leikkauksista eivät välttämättä ole kolmioita, joten kolmioidaan ne. Päädytään kolmiointiin

$$\Pi = \bigcup_{k \in K} \Delta^{\Pi}_k.$$

Nyt Γ:n ja Σ:n annetut kolmioinnit voidaan hienontaa kolmioinneiksi

$$\Gamma = \bigcup_{k \in K} \Delta^{\Gamma}_k, \quad \Sigma = \bigcup_{k \in K} \Delta^{\Sigma}_k$$

siten, että

$$\Delta^{\Gamma}_k \cong \Delta^{\Pi}_k \cong \Delta^{\Sigma}_k,$$

kun $k \in K$. Siis Γ ja Σ ovat yhtähajotettavat. □

Lemma 2.59. *Yhtähajotettavilla monikulmoilla on sama pinta-ala.*

Todistus. Tämä seuraa siitä, että yhtenevillä kolmioilla on sama pinta-ala. □

Lemma 2.60. *Jokaisen monikulmion voi kolmioida siten, että kolmioinnissa esiintyvät kolmiot ovat suorakulmaisia.*

Todistus. Tämä seuraa siitä, että jokainen kolmio voidaan jakaa kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi, kun siihen lisätään pisintä sivua vastaava korkeusjana. □

Lemma 2.61. *Suorakulmainen kolmio on yhtähajotettava jonkin suorakaiteen kanssa.*

Todistus. Kuvaan perustuva perustelu (luennolla). □

Lemma 2.62. *Suorakaide on yhtähajotettava jonkin neliön kanssa.*

Todistus. HT. □

Olkoon Π monikulmio (tai oikeastaan sen piiri). Tällöin piste a on Π:n *sisäpuolella*, jos mikä tahansa pisteestä a lähtevä puolisuora, joka ei kuljet kärkien kautta leikkaa Π:tä parittoman monta kertaa. Piste $b \notin \Pi$ on Π:n *ulkopuolella*, jos siitä lähtevä kärkiä kohtaamaton puolisuora leikkaa Π:tä parillisen monta kertaa.

Lemma 2.63. *Yksinkertaisella monikulmiolla Π, jonka sivujen lukumäärä on $n > 3$, on aina lävistäjä, joka on kokonaan Π:n sisäpuolella.*

Todistus. Kiinnitetään Π:stä kaksi vierekkäistä kärkeä a, b ja tarkastellaan kulmia

$$\alpha_t = \measuredangle bat,$$

missä t on Π:n kolmas kärki. Voidaan olettaa, että Π:n sisäpuolella on pisteitä x, joille $\measuredangle bax > 0$ on mielivaltaisen pieni. Valitaan Π:n kärki c siten, että $\alpha_c < \pi$ on pienin mahdollinen. Jaetaan nyt tarkastelu kahteen tapaukseen.

1) Oletetaan, että c ei ole a:n viereinen kärki eli ac on Π:n lävistäjä. Lävistäjä ac on Π:n sisäpuolella, sillä muuten olisi olemassa Π:n sivu, joka leikkaisi ac:n ja siten olisi olemassa kärki, joka jäisi kulman $\measuredangle bac$ sisälle. Tämä on ristiriita, koska valitsimme minimaalisen kulman.

2) Oletetaan sitten, että ac on Π:n sivu. Tälläin bc on Π:n lävistäjä. Jälleen huomataan, että kulma $\measuredangle bac$ ei voi sisältää Π:n kärkiä, joten bc on Π:n sisäpuolella.

□

Tästä lemmasta seuraa lauseen 2.23 tulos: *Jokainen yksinkertainen suljettu monikulmio voidaan kolmioida.*

Lause 2.64 (Wallacen, Bólyain ja Gerwien lause)**.** *Yksinkertaiset monikulmiot Π ja Π' ovat yhtähajotettavat täsmälleen silloin, kun niillä on sama pinta-ala.*

Todistus. On selvää, että jos Π ja Π' ovat yhtähajotettavat, niin niillä on sama pinta-ala. Oletetaan, että Π:llä ja Π':lla on sama pinta-ala. Vastaavissa kolmioinneissa voidaan käyttää suorakulmaisia kolmioita. Nämä onvat yhtähajotettavia suorakaiteen kanssa. Kukin näistä suorakaiteista on yhtähajotettava jonkin neliön kanssa. Nämä neliöt taas voidaan hajottaa suureksi neliöks (HT). Siis Π ja Π' ovat yhtähajotettavat neliöiden Γ ja Γ' kanssa, joiden sivujen pituudet ovat samat. Siis Γ ja Γ' ovat yhtähajotettavat. Joten Π ja Π' ovat yhtähajotettavat. □

Seuraava lause täydentää luvun 2 alussa esitettyjä tuloksia.

Lause 2.65 (Kulmanpuolittajalause). *Kolmion kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa.*

Todistus. Nimetään kolmion Δabc kärjet niin, että kulmanpuolittaja lähtee kärjestä c.

Kulmanpuolittajan pisteet ovat yhtä kaukana suorista ca ja cb. Kärjestä c lähtevä kulmanpuolittaja leikatkoon sivun ab pisteessä d. Siis

$$d(d, ac) = d(d, bc) = h,$$

missä d on etäisyys. Nyt h on Δadc:n ja Δbdc:n korkeus. Siis näiden pinta-alat ovat

$$A_0 := A(\Delta adc) = |ac| \frac{h}{2}, \quad A_1 := A(\Delta bdc) = |bc| \frac{h}{2}.$$

Kolmioilla Δadc ja Δbdc on yhteinen sivua ab vastaan kohtisuoraa oleva korkeusjana h'. Siis

$$A_0 = |ad| \frac{h'}{2}, \; A_1 = |bd| \frac{h'}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|ac|}{|bc|} = \frac{A_0}{A_1} = \frac{|ad|}{|bd|}.$$

□

2.9 Pinta-alan yksikäsitteisyys

Pinta-alan yksikäsitteisyys ei ole triviaali asia. Esimerkiksi on mahdollista konstruoida jatkuva funktio $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ siten, että $f([0,1]) = [0,1]^2$ (mm. Peanon (Hilbertin) käyrä). Voiko suljetulla monikulmiolla olla kaksi eri pinta-alaa

$$A(\Pi) = \sum_{i=0}^{m} A(\Delta_i)?$$

Lemma 2.66. *Jos on olemassa kaksi yhtähajotettavaa neliötä, joilla on eri sivujen pituudet, niin on olemassa kaksi yhtähajotettavaa neliötä, joiden sivujen pituuksien suhde on mielivaltaisen suuri.*

Todistus. Oletetaan, että olisi olemassa neliöt Γ_0 ja Γ_1, jotka ovat yhtähajotettavat ja joiden sivujen pituudet ovat a ja ka, missä $k > 1$. Tällöin on olemassa yhdemuotoisuuskuvaus f, joka kuvaa Γ_1:n Γ_i:lle. Merkitään

$$\Gamma_{n+1} := f[\Gamma_n],$$

kun $k \in \mathbb{Z}_+$. Koska Γ_0 ja Γ_1 ovat yhtähajotettavat, niin induktiolla saadaan, että Γ_n ja Γ_{n+1} ovat yhtähajotettavat kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Oletusten mukaan nimittäin Γ_0:lla ja Γ_1:llä on kolmioinnit

$$\Gamma_0 = \bigcup_{i \in I} \Delta_i^0, \quad \Gamma_1 = \bigcup_{i \in I} \Delta_i^1,$$

missä $\Delta_i^0 \cong \Delta_i^1$, kun $i \in I$.

Tästä saadaan induktiolla kolmioinnit

$$\Gamma_n = f^n[\Gamma_o] = \bigcup_{i\in I} f^n[\Delta_i^0], \quad \Gamma_{n+1} = f^n[\Gamma_1] = \bigcup_{i\in I} f^n[\Delta_i^1],$$

missä $f^n[\Delta_i^0] \cong f^n[\Delta_i^1]$, kun $i \in I$.

Nyt yhtähajotettavuuden transitiivisuuden vuoksi Γ_0 ja Γ_n ovat yhtähajotettavat kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Neliöiden Γ_0 ja Γ_n sivujen pituuksien suhde on k^n ja $\lim_{n\to\infty} k^n = \infty$. □

Lemma 2.67. *Olkoon Π suljettu monikulmio, jonka pinta-ala on A. Tällöin on olemassa sellainen $s > 0$, että jokaisella $\varepsilon \in]0, s]$ Π:n voi peittää m:llä neliöllä, joiden sivujen pituus on ε ja joille $m\varepsilon^2 \leq 8A$.*

Todistus. Valitaan Π:lle jokin kolmiointi $\Pi = \bigcup_{i\in I} \Delta_i$. Valitaan pituudeksi s pienin kolmoinnissa esiintyvien kolmoiden Δ_i sivujen pituuksista ja vastaavista korkeuksista. Olkoon $0 < \varepsilon \leq s$. Kolmion Δ_i voi peittää $[a_i/\varepsilon] \cdot [h_i/\varepsilon]$ neliöllä joiden sivujen pituus on ε (tässä $[a]$ on *kattofunktio* eli pienin kokonaisluku k, jolle $a \leq k$), missä a_i on yksi kolmioin sivuista ja h_i sitä vastaava korkeus. Kaikkiaan Π:n peittämiseen riittää

$$\sum_{i\in I} \underbrace{[a_i/\varepsilon]}_{\geq 1}\underbrace{[h_i/\varepsilon]}_{\geq 1} \leq \sum_{i\in I} \frac{2a_i}{\varepsilon}\frac{2h_i}{\varepsilon} = \frac{8}{\varepsilon^2}\sum_{i\in I}\frac{a_i h_i}{2} = \frac{8A}{\varepsilon^2}$$

pikkuneliötä. Siis

$$m\varepsilon^2 \leq 8A.$$

□

Seuraus 2.68. *Neliön pinta-ala on suurempi kuin $\frac{a^2}{16}$, kun neliön sivu on a.*

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että neliön Γ pinta-ala olisi $A \leq \frac{a^2}{16}$. Valitaan $s > 0$ kuten edellisessä lemmassa ja $n \in \mathbb{Z}_+$ niin, että $\frac{a}{n} \leq s$. Jaetaan alkuperäinen neliö Γ n^2:seen pikkuneliöön, joille sivujen pituus on $\frac{a}{n}$, ja tarkastellaan näiden keskipisteitä. Toisaalta lemman mukaan Γ:n voi peittää m:llä $\frac{a}{2n}$-sivuisella pikkuneliöllä, missä pätee

$$m\left(\frac{a}{2n}\right)^2 \leq 8A \overbrace{\leq}^{\text{vastaol.}} \frac{a^2}{8} \Rightarrow \frac{m}{4n^2} \leq \frac{1}{8} \Rightarrow m \leq \frac{1}{2}n^2 < n^2.$$

Koska näitä pikkuneliöitä on vähemmän kuin testipisteitä (toisten pikkuneliöiden keskipisteitä), jotkin kaksi testipistettä sijaitsevat samassa $\frac{a}{2n}$-sivuisessa pikkuneliössä. Kuitenkin pikkuneliön halkaisija on

$$\frac{a}{2n}\sqrt{2} = \frac{a}{n\sqrt{2}} < \frac{a}{n}$$

ja testipisteiden etäisyys on vähintään $\frac{a}{n}$, mikä on ristiriita. □

Seuraavan lemman ja seurauksen todistukset sivuutetaan, mutta tuloksia käytetään jäljempänä.

Lemma 2.69. *On olemassa vakio $c > 0$, jolle pätee seuraavaa: Olkoon Π suljettu monikulmio, jonka pinta-ala on A. Tällöin on olemassa sellainen $s > 0$, että jokaiselle $\varepsilon \in]0, s]$ voidaan valita sellainen äärellinen joukko $T \subseteq \Pi$, että $|T|\varepsilon^2 \geq cA$ ja kunkin pisteen $z \in T$ etäisyys Π:n sivuista on vähemmän kuin ε ja T:n pisteiden keskinäiset etäisyydet ovat vähintään ε:n suuruisia.*

Seuraus 2.70. *On olemassa sellainen vakio $c' > 0$, että neliön pinta-ala on aina pienempi kuin $c'a^2$, kun sivun pituus on a.*

Lause 2.71. *Neliöt ovat yhtähajotettavat täsmälleen silloin, kun ne ovat yhteneviä.*

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että olisi olemassa epäyhtenevät yhtähajotettavat neliöt.

Aiemmin on todistettu, että tällöin on olemassa yhtähajotettavat neliöt, joiden sivujen suhde $k \geq 8\sqrt{c'}$. Olkoon a ja ka näiden neliöiden sivujen pituudet. Koska neliöt ovat yhtähajotettavat, niillä on yhteinen pinta-ala A, jolle

$$c'a^2 = \frac{(8\sqrt{c'}a)^2}{64} \leq \frac{(ka)^2}{64} < A < c'a^2,$$

mikä on ristiriitaista. □

Lemma 2.72. *Olkoon Δ suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat a ja b, $a \geq b$. Merkitään*

$$A = \frac{ab}{2}.$$

Tällöin on olemassa $s > 0$, että kun $\varepsilon \in [0, s[$, niin Δ:n sisään voi sijoittaa m pistettä niin, että

1) $4m\varepsilon^2 \geq A$.

2) pisteiden keskinäiset etäisyydet ovat vähintään ε:n suuruisia ja

3) pisteiden etäisyydet sivuista ovat vähintään ε:n suuruisia

Todistus. Täydennetään Δ suorakaiteeksi, ts. olkoon Δ' Δ:n kanssa yhtenevä kolmio, jolle $\Delta \cup \Delta'$ on suorakaiteen kolmiointi. Piirretään suorakaiteen $\Delta \cup \Delta'$ sisään hilapisteistö S_0, jossa lähimpien hilapisteiden etäisyys ε, missä yhdysjana on jomman kumman kateetin suuntainen ja kunkin S_0:n pisteen etäisyys Δ:n kateeteistä on pienimmillään ε. Tällöin

$$|S_0| = [a/\varepsilon]_{\text{min}} \cdot [b/\varepsilon]_{\text{min}},$$

missä $[a]_{\text{min}}$ on *lattiafunktio* eli suurin kokonaisluku k, jolle $k \leq a$.

Karsitaan S_0:sta pois pisteet, jotka ovat lähempänä kuin ε:n etäisyydellä Δ':n sivuista tai Δ:n hypotenuusasta. Jäljelle jää $S_1 \subseteq S_0$, jolle

$$|S_1| \geq ([a/\varepsilon]_{\text{min}} - 1)([b/\varepsilon]_{\text{min}} - 5).$$

Valitaan $s = \frac{b}{11}$. Kun $0 < \varepsilon \leq s$, saadaan

$$|S_1| \geq \frac{a}{2\varepsilon}\frac{b}{2\varepsilon} = \frac{ab}{4\varepsilon^2} = \frac{1}{2}\frac{A}{\varepsilon^2}.$$

Ositetaan vielä $S_1 \subseteq \Delta_0 \cup \Delta - 1$ seuraavasti $S_1 = S \cup S'$, $S \subseteq \Delta$ ja $S' \subseteq \Delta'$. Koska $\Delta \cong \Delta'$, niin voidaan olettaa, että $|S| \geq |S'|$, jolloin

$$m = |S| \geq \frac{1}{2}|S_1| \geq \frac{1}{2}\frac{A}{2\varepsilon^2}.$$

□

Lemma 2.73. *Olkoon Π suljettu yksinkertainen monikulmio, jolla on pinta-ala A. Tällöin jollakin $s > 0$ on voimassa seuraavaa: Kun $\varepsilon \in]0, s[$, niin Π sisältää äärellisen pisten joukon S, jolle*

1) $4|S|\varepsilon^2 \geq A$

2) S:n pisteiden keskinäiset etäisyydet ovat vähintään ε:n suuruisia ja

3) S:n pisteiden etäisyydet monikulmion sivuista ovat vähintään ε:n suuruisia.

Todistus. Kiinnitetään Π:lle kolmiointi, joka vastaa pinta-alaa A, ts.

$$\Pi = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ ja } A = \sum_{i \in I} A_i,$$

missä A_i on kolmion Δ_i pinta-ala. Tässä kolmioinnissa voidaan olettaa jokaisella $i \in I$ kolmio Δ_i on suorakulmainen. Edellisen lemman perusteella jokainen Δ_i, $i \in I$ vastaa luku s_i siten, että kohtia 1)–3) vastaavat ehdot ovat voimassa.

Valitaan $s = \min\{ s_i \mid i \in I \}$. Kun $\varepsilon \in]0, s[$, niin jokaisella $i \in I$ pätee $0 < \varepsilon \leq s_i$, joten on olemassa sellainen joukko $S_i \subseteq \Delta_i$, että $4|S_i|\varepsilon^2 \geq A_i$ ja se toteuttaa lisäksi kohtia 2)–3) vastaavat ehdot. Selvästi $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ on halutunlainen, ja erityisesti

$$4|S|\varepsilon^2 = \sum_{i \in I} 4|S_i|\varepsilon^2 \geq \sum_{i \in I} A_i = A.$$

□

Lemma 2.74. *Suljetun neliön pinta-ala $A < 20a^2$, kun a on neliön sivun pituus.*

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että olisi olemassa neliö Γ, jonka sivun pituus on a ja pinta-ala $A \geq 20a^2$. Valitaan $s > 0$, joka on kuten edellisessä lemmassa, kun sitä sovelletaan suljettuun neliöön ja valitaan $n \in \mathbb{Z}_+$, jolle $\varepsilon = \frac{a}{n} \leq s$. Edellisen lemman nojalla on olemassa suljettuun neliöön sisältyvä S, jolle

$$4|S|\varepsilon^2 \geq A \geq 20a^2 \Rightarrow |S| \geq \frac{5a^2}{\varepsilon^2} = 5n^2$$

ja kun $x, y \in S, x \neq y$, niin x:n ja y:n etäisyys on vähintään ε.

Jaetaan neliö Γ pikkuneliöiksi:

$$\Gamma = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i,$$

missä kukin Γ_i on neliö, jonka sivu on $\varepsilon/2$. Nämä voidaan valita niin, että

$$|I| = \left(\frac{a}{\varepsilon/2}\right)^2 = (2n)^2 = 4n^2.$$

Koska

$$|S| \geq 5n^2 > 4n^2 = |I|,$$

niin jossakin pikkuneliössä Γ_i on kaksi S:n pistettä. Tämä on mahdotonta, koska Γ_i:n halkaisija on

$$\sqrt{2}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon,$$

mikä on ristiriita. □

Seuraa

Lause 2.75. *Suljetun neliön pinta-ala on yksikäsitteinen, se on a^2, missä a on neliön sivun pituus.*

Todistus. Lause 2.25 (Wallacen, Bólyain ja Gerwien lause): Yksinkertaiset monikulmiot ovat yhtähajotettavat täsmälleen silloin, kun niillä on sama pinta-ala. Lemma 2.16: Jos on olemassa kaksi yhtähajotettavaa neliötä, joilla on eri sivujen pituudet, niin on olemassa kaksi yhtähajotettavaa neliötä, joiden sivujen pituuksien suhde on mielivaltaisen suuri.

Edellä on päätelty, että suljetun neliön pinta-ala $\frac{a^2}{16} < A < 20a^2$, kun a on neliön sivun pituus, ja että a^2 on ainakin neliön pinta-ala. Väite seuraa tästä. □

Seuraus 2.76. *Suljetun monikulmion pinta-ala on yksikäsitteinen.*

3 Kartioleikkaukset

3.1 Ellipsi, paraabeli ja hyperbeli

Kartioleikkauksia on ympyrä, ellipsi, paraabeli ja hyperbeli, jotka pystytään muodostamaan suoran ympyräkartion ja tason leikkauksina $\mathbb{R}^3$:ssa.

Määritelmä 3.1. *Ellipsillä* tarkoitetaan niiden tason pisteiden uraa (eli joukkoa), joille etäisyyksien summa kiinteistä pisteistä p ja q on näiden pisteiden keskinäistä etäisyyttä suurempi vakio, ts. joukko E on ellipsi, jos on olemassa $p, q \in \mathbb{R}^2$ ja vakio $c > |p - q|$, että

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x - p| + |x - q| = c \right\}.$$

Pisteitä p ja q kutsutaan ellipsin E *polttopisteiksi*.

Mahdollinen erikoistapaus on $p = q$. Tällöin $E = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 2\,|x - p| = c \} = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - p| = c/2 \}$, ts. E on ympyrä. Ympyrät ovat siis ellipsejä, mutta ellipsit eivät eivät tietenkään yleisesti ole ympyröitä. Sen sijaan määritelmä kieltää mahdollisuuden $p \neq q$ ja $c = |p - q|$, jolloin joukon E voidaan osoittaa surkastuvan janaksi.

Lause 3.2. *Olkoon E ellipsi, jonka polttopisteet sijaitsevat x-akselilla symmetrisesti origon suhteen. Tällöin joillakin $a, b > 0$ pätee*

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Todistus. Olkoot $p = (-t, 0), q = (t, 0), t \geq 0$ E:n polttopisteet. Merkitään c:llä vakiota, joka on kuten määritelmässä, ts.

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x - p| + |x - 1| = c \right\}.$$

Huomataan, että $(c/2, 0) \in E$, sillä

$$\begin{aligned} \left|\left(\frac{c}{2}, 0\right) - (t, 0)\right| + \left|\left(\frac{c}{2}, 0\right) - (-t, 0)\right| &= \left|\frac{c}{2} - t\right| + \left|\frac{c}{2} + t\right| \\ &= \left(\frac{c}{2} - t\right) + \left(\frac{c}{2} + t\right) = c. \end{aligned}$$

Merkitään $a = \frac{\varepsilon}{2}$. Havaitaan, että E sisältyy $2a$-sivuiseen neliöön:

$$E \subseteq Q := \{ (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_0| \leq a, |x_1| \leq a \}.$$

Kun $(x, y) \in Q$, niin

$$\begin{aligned}(x,y) \in E &\Leftrightarrow |(x,y)-(t,0)| + |(x,y)-(-t,0)| = 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-t)^2+y^2} + \sqrt{(x+t)^2+y^2} = 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-t)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+t)^2+y^2} \\ &\Rightarrow (x-t)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+t)^2+y^2} + (x+t)^2+y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-2xt+t^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+t)^2+y^2} + x^2+2xt+t^2 \\ &\Leftrightarrow 4a\sqrt{(x+t)^2+y^2} = \underbrace{4a^2+4xt}_{\geq 0} \quad (|x \cdot t| \leq a \cdot a = a^2) \\ &\Leftrightarrow a^2((x+t)^2+y^2) = a^4 + x^2t^2 + 2a^2xt \\ &\Leftrightarrow (a^2-t^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2t^2 = a^2(a^2-t^2) \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-t^2} = 1.\end{aligned}$$

Siis saatiin implikaatio

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

missä $b = \sqrt{a^2 - t^2}$. On siis todistettu, että

$$E \subseteq \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \right\} \subseteq S := \left\{ (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x_0| \leq a, |x_1| \leq b \right\}.$$

Erityisesti E siis sisältyy suorakaiteeseen S.

Kun $(x, y) \in S$, niin

$$\begin{aligned}|(x,y)-(-t,0)| &= \sqrt{(x+t)^2+y^2} \\ &\leq \sqrt{(a+t)^2+b^2} = \sqrt{2a^2-2at} \\ &\leq \sqrt{2a^2+2a^2} = 2a\end{aligned}$$

joten $2a - \sqrt{x+t)^2+y^2} \geq 0 \quad (*)$ ja

$$\begin{aligned}(x,y) \in E &\Leftrightarrow \sqrt{(x-t)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+t)^2+y^2} \\ &\overbrace{\Leftrightarrow}^{(*)} (x-t)^2+y^2 = 4a - 4a\sqrt{(x+t)^2+y^2} + (x+t^2)+y^2 \\ &\overbrace{\Leftrightarrow}^{\text{päätelty edellä}} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.\end{aligned}$$

Siis

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

□

Huomautus 3.3. Janoja origosta pisteisiin $(a, 0)$ ja $(0, b)$ kutsutaan ellipsin *puoliakseleiksi*.

Ellipsillä on symmetriakeskipiste, joka on polttopisteiden yhdysjanan keskipiste. Ellipsien symmetriaryhmät ovat isomorfisia, jos ellipsit eivät ole ympyröitä.

Määritelmä 3.4. Tasokuvio on *paraabeli*, jos se on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä kaukana kiinteästä pisteestä ja kiinteästä suorasta. Tässä oletetaan, että kiinteä piste p (*polttopiste*) ei ole kiinteällä suoralla l (*johtosuora*).

Lause 3.5. *Jos paraabelin P johtosuora on x-akselin suuntainen, niin jollakin a, b, c, $a \neq 0$, pätee*

$$P = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bx + c = y \}.$$

Todistus. Olkoon P:n johtosuora

$$l = \{ (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = t \},$$

missä $t \in \mathbb{R}$ on vakio, ja P:n polttopiste $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, missä $y_1 \neq t$. Määritelmästä saadaan

$$\begin{aligned}
(x_0, x_1) \in P &\Leftrightarrow |x_1 - t| = \sqrt{(x_0 - y_0)^2 + (x_1 - y_1)^2} \\
&\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 t + t^2 = (x_0 - y^2)^2 + (x_1 + y_1)^2 \\
&\Leftrightarrow -2x_1 t + t^2 = x_0^2 - 2x_0 y_0 + y_0^2 - 2x_1 y_1 + y_1^2 \\
&\Leftrightarrow 2x_1 \underbrace{(y_1 - t)}_{\neq 0} = x_0^2 - 2x_0 y_0 + y_0^2 + y_1^2 - t^2 \\
&\Leftrightarrow x_1 = \frac{x_0^2 - 2x_0 y_0 + y_0^2 + y_1^2 - t^2}{2(y_1 - t)} = ax_0^2 + bx_0 + c,
\end{aligned}$$

missä $a = \dfrac{1}{2(y_1 - t)}$, $b = \dfrac{-y_0}{y_1 - t}$ ja $c = \dfrac{y_0^2 + y_1^2 - t^2}{2(y_1 - t)}$. ☐

Määritelmä 3.6. Olkoon a ja b kaksi tason pistettä ja $0 < d < |a - b|$. *Polttopisteiden a* ja b, sekä *erotusparametrin d* määräämä *hyperbeli* on

$$H := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \big| |x - a| - |x - b| \big| = d \right\}.$$

3.2 Kartio leikkaa tasoa

Määritelmä 3.7. *Suora kaksivaippainen ympyräkartio* on $\mathbb{R}^3$:n osajoukko K, jonka määräävät *huippu* $p \in \mathbb{R}^3$, huipun kautta kulkeva suora l ja suhde $k > 1$. Kartio K koostuu niistä pisteistä, joilla etäisyyksien suhde huipusta p ja suorasta l on vakio k.

Lause 3.8. *Suoran kaksiosaisen ympyräkartion K yhtälö on 2. asteen polynomiyhtälö muuttujien x_0, x_1 ja x_2 suhteen, missä $(x_0, x_1, x_2) \in K$.*

Todistus. Olkoon K suora kaksivaippainen ympyräkartio, jonka huippu $p = (p_0, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^3$, määräävä suora on l ja suhde on $k > 0$. Olkoon $s = (s_0, s_1, s_2)$ suoran l suuntavektori, jolle $|s| = 1$, ts.

$$l = \{\, p + \lambda s \mid \lambda \in \mathbb{R} \,\},$$

sillä määritelmän mukaan $p \in l$. Merkitään

$$k = \frac{1}{\sin \alpha},$$

missä $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Huomataan, että K koostuu niistä pisteistä $x = (x_0, x_1, x_2)$, joille suoran l ja janan px välinen kulma on α ja lisäksi $p \in K$. Siis

$$K = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid |(p - x) \cdot s| = |p - x|\,|s| \cos \alpha \,\}.$$

Kun $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$, niin

$$\begin{aligned}
x \in K &\Leftrightarrow (p - x) \cdot s = |p - x| \underbrace{|s|}_{=1} \cos \alpha \\
&\Leftrightarrow \left| \sum_{i=0}^{2} (p_i - x_i) s_i \right| = \cos \alpha \cdot \sqrt{\sum_{i=0}^{2} (p_i - x_i)^2 (\geq 0)} \\
&\overbrace{\Leftrightarrow}^{(\cdot)^2} \sum_{i=0}^{2} (p_i - x_i)^2 s_i^2 + 2(p_0 - x_0) s_0 (p_1 - x_1) s_1 \\
&\qquad + 2(p_0 - x_0) s_0 (p_2 - x_2) s_2 + 2(p_1 - x_1) s_1 (p_2 - x_2) s_2 \\
&\qquad = \cos^2 \alpha \sum_{i=0}^{2} (p_i - x_i)^2 \\
&\Leftrightarrow (x_0 - p_0)^2 (s_0^2 - \cos^2 \alpha) + (x_1 - p_1)^2 (s_1^2 - \cos^2 \alpha) + (x_2 - p_2)^2 (s_2^2 - \cos^2 \alpha) \\
&+ 2(x_0 - p_0)(x_1 - p_1) s_0 s_1 + 2(x_0 - p_0)(x_2 - p_2) s_0 s_2 + 2(x_1 - p_1)(x_2 - p_2) s_1 s_2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Viimeisen yhtälön termit voi tietysti järjestellä haluttuun muotoon. □

Lause 3.9. *Kun suoraa kaksivaippaista ympyräkartiota leikataan tasolla $\{\, (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0 \,\}$, niin saadaan kartioleikkaus, jonka yhtälö on 2. asteen muotoa muuttujien x_0 ja x_1 suhteen, ts. jos L on tämä kartioleikkaus, niin*

$$L = \{\, (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x_0, x_1) = 0 \,\},$$

missä f on 2. asteen polynomi.

Todistus. Olkoon K kartio. Käytetään sille edellisessä todistuksessa johdettua yhtälöä ja sijoitetaan sinne $x_2 = 0$. Tällöin saadaan

$$L = K \cap \{ (x_0, x_1, 0) \mid (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \} = \{ (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x_0, x_1) = 0 \},$$

missä

$$f(x_0, x_1) = (x_0 - p_0)^2(s_0^2 - \cos^2\alpha) + (x_1 - p_1)^2(s_1^2 - \cos^2\alpha) + (0 - p_2)^2(s_2^2 - \cos^2\alpha)$$
$$+2(x_0 - p_0)(x_1 - p_1)s_0 s_1 + 2(x_0 - p_0)(0 - p_2)s_0 s_2 + 2(x_1 - p_1)(0 - p_2)s_1 s_2,$$

joka on 2. asteen polynomifunktio muuttujien x_0 ja x_1 suhteen. $\square$

3.3 Toisen asteen käyrän analysointi

Määritelmä 3.10. Polynomikuvaus $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on *k-asteinen muoto* ($k, n \in \mathbb{Z}_+$), jos kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ pätee $p(tx) = t^k p(x)$. 2-asteista muotoa kutsutaan *neliömuodoksi.*

Lemma 3.11. *Polynomikuvaus $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on neliömuoto, jos ja vain jos joillakin kertoimilla $a, b, c \in \mathbb{R}$ pätee, että*

$$p(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2,$$

kun $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$.

Todistushahmotelma. Oletetaan ensin, että joillakin vakioilla $a, b, c \in \mathbb{R}$ pätee, että

$$p(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2,$$

kun $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$. Tällöin kaikilla $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ ja $t \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$\begin{aligned} p(t(x_0, x_1)) = p(tx_0, tx_1) &= a(tx_0)^2 + b(tx_0)(tx_1) + c(tx_1)^2 \\ &= t^2 ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 = t^2 p(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Olkoon sitten polynomikuvaus $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mielivaltainen neliömuoto. Oletetaan, että $\deg(p) \leq 2$, ts. kun $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$, niin

$$p(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + dx_0 + ex_1 + f,$$

missä $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Koska p on neliömuoto, niin erityisesti

$$f = p(0, 0) = p(0 \cdot (0, 0)) = 0^2 p(0, 0) = 0.$$

Edelleen

$$a - d = p(-1, 0) = p((-1)(1, 0)) = (-1)^2 p(1, 0) = p(1, 0) = a + d$$

joten $d = 0$. Vastaavasti

$$p(0, -1) = p(0, 1) \Rightarrow c - e = c + e \Rightarrow e = 0.$$

Siis p on haluttua muotoa.

Esitetään hahmotelma siitä, miksi tapaus $\deg(p) > 2$ on mahdoton. Kirjoitetaan

$$p(x_0, x_1) = \sum a_{ij} x_0^i x_1^j,$$

missä vain äärellisen moni vakioista a_{ij} eroaa nollasta. Oletetaan vastoin väitettä, että joillakin $i, j \in \mathbb{N}$ $a_{ij} \neq 0$ ja $i + j > 2$. Merkitään

$$n := \max\{\, i + j \mid i, j \in \mathbb{N}, a_{ij} \neq 0 \,\}(> 2).$$

Voidaan valita $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, jolle

$$\tau = \sum_{i+j=n} a_{ij} y_0^i y_1^j \neq 0.$$

Merkitään

$$\delta = \sum_{i+j<n} \left| a_{ij} \right|.$$

Tällöin kaikilla $t \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$\begin{aligned}
&|p(t(y_0, y_1)) - t^n \tau| \\
&= \left| \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{ij} (t y_0)^i (t y_1)^j - t^n \sum_{i+j=n} a_{ij} y_0^i y_1^j \right| = \left| \sum_{i+j<n} a_{ij} (t y_0)^i (t y_1)^j \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\delta| \max\{|y_0|, |y_1|\}^k t^k \leq f t^{n-1}.
\end{aligned}$$

Kun $t \to \infty$, niin asymptotiikka osoittaa, että p ei voi olla neliömuoto $((p(t(y_0, y_1)) \approx t^n \tau))$. □

Määritelmä 3.12. Neliömuoto $p \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on *indefiniitti*, jos se saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Jos p ei ole indefiniitti ja $p(x) \neq 0$, kun $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, niin p on *definiitti*. Jos p ei ole indefiniitti eikä definiitti, niin se on *semidefiniitti*.

Lause 3.13. *Neliömuoto* $p \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, p(x_0, x_1) = a x_0^2 + b x_0 x_1 + c x_1^2$ *on*

1) indefiniitti, jos $b^2 - 4ac > 0$,

2) semidefiniitti, jos $b^2 - 4ac = 0$ *ja*

3) definiitti, jos $b^2 - 4ac < 0$.

Todistus. Oletetaan ensin, että $a \neq 0$, kun $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$, niin

$$\begin{aligned}
p(x_0, x_1) &= ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 \\
&= a(x_0^2 + \frac{b}{a}x_0x_1) + cx_1^2 \\
&= a\left(x_0^2 + 2\frac{b}{2a}x_0x_1 + \frac{b^2}{4a^2}x_1^2\right) + cx_1^2 - \frac{ab^2}{4a^2}x_1^2 \\
&= a\left(x_0 + \frac{b}{2a}x_1\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}x_1^2 \quad (*).
\end{aligned}$$

Jaetaan nyt käsittely kolmeen tapaukseen.

Oletetaan, että $b^2 - 4ac < 0$. Nyt lausekkeessa $(*)$ summattavat ovat saman merkkisiä tai ainakin toinen on nolla. Voidaan olettaa, että $a > 0$, jolloin $p(x_0, x_1) \geq 0$, ja

$$p(x_0, x_1) = 0 \Leftrightarrow a\left(x_0 + \frac{b}{2a}x_1\right)^2 + \underbrace{\frac{4ac - b^2}{4a}}_{\neq 0} x_1^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, ax_0^2 = 0 \Rightarrow x_0 = x_1 = 0.$$

Siis tässä tapauksessa p on definiitti.

Oletetaan sitten, että $b^2 - 4ac = 0$. Selvästi p ei voi saada sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Toisaalta

$$p(x_0, x_1) = 0 \Leftrightarrow \left(x_0 + \frac{b}{2a}x_1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}x_1.$$

Siis p on semidefiniitti.

Oletetaan lopuksi, että $b^2 - 4ac > 0$. Edelleen kaava $(*)$ on voimassa. Voidaan olettaa, että $a > 0$. Tällöin kaikilla $x_0 \neq 0$ pätee $p(x_0, 0) = ax_0^2 > 0$ ja jos $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2, x_1 \neq 0$, toteuttaa yhtälön $x_0 + \frac{b}{2a}x_1 = 0$, niin

$$p(x_0, x_1) = \frac{4ac - b^2}{4a} < 0.$$

Siis p on idefiniitti.

Vielä on käsittelemättä erikoistapaus $a = 0$. Olisimme voineet edellä symmetrian vuoksi yhtähyvin tukeutua oletukseen $c \neq 0$. Joten jäljelle jää erikoistapaus $a = c = 0$, ts. $p(x_0, x_1) = bx_0x_1$, kun (x_0, x_1) ja $b^2 - 4ac = b^2$. Tällöin

$$b = 0 \text{ eli } b^2 = 0 \Rightarrow p = 0 \text{ eli } p \text{ on semidefiniitti}$$

ja jos

$$b \neq 0 \text{ eli } b^2 - 4ac = b^2 > 0,$$

niin p saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja eli p on indefiniitti. □

Lause 3.14. *Olkoon* $C := g^{-1}\{0\}$ *2. asteen käyrä, missä*

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + dx_0 + ex_1 + f.$$

Merkitään p:llä vastaavaa neliömuotoa

$$p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ p(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2.$$

Jos p *on definiitti tai indefiniitti, niin* $C \cong p^{-1}\{\gamma\}$ *jollakin vakiolla* $\gamma \in \mathbb{R}$.

Todistus. Osoitetaan, että itse asiassa on olemassa sellainen siirto s_{-t}, $t = (t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2$, että $s_{-t}\colon C \cong p^{-1}\{\gamma\}$. Olkoon $t = (t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2$. Kun $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$, niin

$$\begin{aligned}
(g \circ s_{-t}^{-1})(x_0, x_1) &= (g \circ s_t)(x_0, x_1) = g(x_0 + t_0, x_1 + t_1)\\
&= a(x_0 + t_0)^2 + b(x_0 + t_0)(x_1 + t_1) + c(x_1 + t_1)^2\\
&\quad + d(x_0 + t_0) + e(x_1 + t_1) + f\\
&= ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + (2at_0 + bt_1 + d)x_0\\
&\quad + (bt_0 + 2ct_1 + e)x_1 + at_0^2 + bt_0t_1 + ct_1^2 + dt_0 + et_1 + f\\
&= p(x_0, x_1) + (2at_0 + bt_1 + d)x_0 + (bt_0 + 2ct_1 + e)x_1 + p(t_0, t_1).
\end{aligned}$$

Siirto s_{-t} halutaan valita siten, että $2at_0 + bt_1 + d = 0$ ja $bt_0 + 2ct_1 + e = 0$ eli

$$\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \\ -e \end{pmatrix}.$$

Tällä yhtälöllä on ratkaisu, koska

$$\det \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix} = 4ac - b^2 \neq 0,$$

sillä p on definiitti tai indefiniitti. Jos $t = (t_0, t_1)$ on tämä ratkaisu, niin kaikilla $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ pätee

$$(g \circ s_{-t}^{-1})(x_0, x_1) = p(x_0, x_1) + \gamma,$$

missä $\gamma = p(t_0, t_1)$. Siis

$$p^{-1}\{\gamma\} = s_{-t}[C] \cong C.$$

□

Lemma 3.15. *Neliömuodon* $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, p(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2$ *lausekkeella on esitys*

$$p(x_0, x_1) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Todistus. Todellakin

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ax_0 + \frac{bx_1}{2} \\ \frac{bx_0}{2} + cx_1 \end{pmatrix} \\ &= ax_0^2 + \frac{bx_0x_1}{2} + \frac{bx_0x_1}{2} + cx_1^2 \\ &= ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2.\end{aligned}$$

□

Seuraavaksi esitämme joitain aputuloksia lineaarialgebrasta.

Fakta: Symmetrisellä $n \times n$-matriisilla on n lineaarisestiriippumatonta ominaisarvoa.

Karakteristinen polynomi matriisille

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$$

on

$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(b-\lambda) - \frac{b^2}{4} = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - \frac{b^2}{4}.$$

Tämän polynomin diskriminantti on

$$D = (-(a+c))^2 - 4(ac - \frac{b^2}{4}) = (a-c)^2 + b^2 \geq 0.$$

Huomataan, että

$$D = 0 \Leftrightarrow a = c, b = 0.$$

Tällöin

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI,$$

missä I on identiteettimatriisi, ja matriisilla on ominaisvektorit (1,0) ja (0,1).

Fakta: Symmetrisen $n \times n$-reaalimatriisin ominaisarvot ovat reaalisia.

Fakta: Symmetrisen $n \times n$-matriisin eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat keskenään kohtisuorassa.

Todistus. Olkoon A symmetrinen $n \times n$-matriisi, ts. $A^T = A$. Olkoon x ja ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori ja vastaavasti y ominaisarvoa μ vastaava ominaisvektori. Tällöin

$$x^T Ay = x^T(\mu y) = \mu(x^T y)$$

ja

$$x^t Ay = (y^T Ax)^T = (y^T(\lambda x))^T = \lambda(x^T y).$$

Siis

$$(\mu - \lambda)x^T y = 0 \Rightarrow x^T y = 0 \Rightarrow x \text{ ja } y \text{ ovat kohtisuorassa.}$$

□

Merkitään *kiertomatriisia*

$$R_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Luennoilla esitettiin seuraavien tulosten todistusten hahmotelmat.

Lause 3.16. *Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ toisen asteen polynomifunktio, jota vastaava neliömuoto on definiitti. Tällöin jokaisella $\gamma \in \mathbb{R}$ tasa-arvokäyrä $f^{-1}\{\gamma\}$ on joko ellipsi tai piste tahi tyhjä joukko.*

Lause 3.17. *Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ toisen asteen polynomifunktiot, jota vastaava neliömuoto on indefiniitti. Tällöin jokaisella $\gamma \in \mathbb{R}$ tasa-arvokäyrä $f^{-1}\{\gamma\}$ on joko ellipsi tai toisiaan leikkaava suorapari.*

Lause 3.18. *Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ toisen asteen polynomifunktiot, jota vastaava neliömuoto on semidefiniitti. Tällöin jokaisella $\gamma \in \mathbb{R}$ tasa-arvokäyrä $f^{-1}\{\gamma\}$ on joko paraabeli tai suora tai yhdensuuntaisista suorista koostuva suorapari.*

4 Banachin ja Tarskin paradoksi

Seuraava tulos esitettiin luennoilla ylimääräisenä asiana, jota ei kuulustella.

Lause 4.1 (Banachin–Tarskin paradoksi). *Pallon voi osittaa viiteen osaan niin, että osista voidaan siirroin ja kierroin yhdistää kaksi alkuperäisen pallon kokoista palloa.*