Tampereen yliopisto, ITC
Tietokonegrafiikan geometria
Harjoitus 1 (11. 1.)
Kevät 2023

1. Esitä esimerkit kuvauksista $f, L_0, L_1, L_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

a) f on jatkuva, muttei lineaarikuvaus.

b) L_0 on lineaarikuvaus, muttei injektio.

c) L_1 on injektiivinen lineaarikuvaus, jolla ei ole kiintopisteitä origoa lukuun ottamatta, ts. $L_1(x) \neq x$, kun $x \neq (0,0)$.

d) L_2 on sellainen injektiivinen lineaarikuvaus, että joillakin $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ pätee $|L_2(x)|/|L_2(y)| \neq |x|/|y|$.

2. Olkoon $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ euklidisten avaruuksien välinen lineaarikuvaus, U $\mathbb{R}^m$:n vektorialiavaruus ja V $\mathbb{R}^n$:n vektorialiavaruus. Osoita, että

a) $A[U]$ on $\mathbb{R}^n$:n vektorialiavaruus ja

b) $A^{-1}[V]$ on $\mathbb{R}^m$:n vektorialiavaruus.

3. Olkoon V reaalinen vektoriavaruus, jolle $\dim(V) \geq 2$. Osoita, että on olemassa kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla. Huomaa, että $c \in V$ on eri pisteiden $a, b \in V$ kautta kulkevalla suoralla täsmälleen silloin, kun on olemassa $t \in \mathbb{R}$, jolle $c = ta + (1-t)b$.

4. Miksi euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukot

$$T_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 15\} \text{ ja } T_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 9\}$$

ovat tasoja? Mikä on niiden leikkaus? Määritä kaksi pistettä, jotka sijaitsevat leikkauksella $T_0 \cap T_1$.

5. Tarkastellaan edelleen edellisen tehtävän joukkoja T_0 ja T_1. Etsi $\mathbb{R}^3$:n sellaiset aliavaruudet U_0 ja U_1, että U_i on yhdensuuntainen tason T_i kanssa, kun $i \in \{0,1\}$. Määritä näille aliavaruuksille kannat E_0 ja E_1 niin, että leikkauksessa $E_0 \cap E_1$ on yhteinen vektori.

6. Olkoon E reaalinen vektoriavaruus, $K \subseteq E$ kupera ja $L\colon E \to E$ lineaarikuvaus. (Joukko K on *kupera*, jos kaikille $a, b \in K$ ja $t \in [0,1]$ pätee $ta + (1-t)b \in K$.) Ovatko $L[K]$ ja $L^{-1}[K]$ välttämättä kuperia?