Tampereen yliopisto, ITC
Tietokonegrafiikan geometria
Harjoitus 2 (18. 1.)
Kevät 2023

1. Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $A \subseteq V$. Osoita, että:

a) Jos A on V:n affiini aliavaruus, niin A on suljettu affiinien kombinaatioiden suhteen, ts. kun $I \subseteq A$ on äärellinen ja $\lambda_v \in \mathbb{R}$, $v \in I$, niin $\sum_{v \in I} \lambda_v v \in A$.

b) Jos A sisältää kunkin pisteparinsa yhdysjanan eli on *kupera*, niin A on suljettu konveksien kombinaatioiden suhteen.

2. Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Osoita, että :

a) V:n affiinien aliavaruuksien leikkaus on tyhjä tai affiini aliavaruus.

b) Jos A on affiini aliavaruus ja K on kupera, niin $A \cap K$ on kupera.

3. Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia ja $L\colon V \to W$ lineaarikuvaus.

a) Todista, että jos B on W:n affiini aliavaruus, niin $L^{-1}[B]$ on joko tyhjä tai affiini aliavaruus. Totea, että tämä merkitsee erityisesti, että lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisujen joukko on affiini aliavaruus, jos ratkaisuja on.

b) Näytä, että jos A on V:n affiini aliavaruus, niin $L[A]$ on W:n affiini aliavaruus.

4. Olkoon E reaalinen vektoriavaruus, $K \subseteq E$ kupera ja $L\colon E \to E$ lineaarikuvaus. Ovatko $L[K]$ ja $L^{-1}[K]$ kuperia?

5. Olkoon V reaalinen vektoriavaruus.

a) Totea, että määritelmän mukaan jokaisella V:n suoralla on ainakin kaksi pistettä.

b) Näytä, että kun $a, b \in V$, $a \neq b$, niin pisteiden a ja b kautta kulkeva suora on ainoa suora, joka sisältää molemmat pisteet, a:n ja b:n.

6. Olkoon V reaalinen vektoriavaruus, jolle $\dim(V) \geq 2$. Suorien $\ell, m \subseteq V$ sanotaan olevan *yhdensuuntaiset*, $\ell \parallel m$, jos niitä vastaa sama vektoriavaruus U, ts. jos

$$\{x - y \mid x, y \in \ell\} = U = \{x' - y' \mid x', y' \in m\}.$$

Todista, että eri suorat ℓ ja m ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun on olemassa sellainen V:n taso T, että $\ell, m \subseteq T$ ja $\ell \cap m = \emptyset$.