Tampereen yliopisto, ITC
Tietokonegrafiikan geometria
Harjoitus 3 (25. 1.)
Kevät 2023

1. Olkoon V reaalinen vektoriavaruus, jolle $\dim(V) \geq 2$. Olkoon $\ell \subseteq V$ suora ja $a \in V \setminus \ell$. Olkoon m suora, joka kulkee pisteen a kautta ja jolle $m \cap \ell = \emptyset$. Osoita, että m on yksikäsitteinen, jos ja vain jos $\dim(V) = 2$.

2. Olkoon V reaalinen vektoriavaruus, jolle $\dim(V) \geq 2$. Merkitään pisteiden a ja b kautta kulkevaa suoraa $\ell(a, b)$:llä. Todista seuraava *Pappuksen laki* ja piirrä kuva tilanteesta: Olkoot a, b ja c samalla V:n suoralla ja a', b' ja c' toisella V:n suoralla, jotka leikkaavat. Oletetaan, että $\ell(a, b') \parallel \ell(a', b)$ ja $\ell(b, c') \parallel \ell(b', c)$. Tällöin $\ell(a, c') \parallel \ell(a', c)$.

3. Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $S \subseteq V$ joukko, jossa on $n + 1$ pistettä, missä $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että on olemassa V:n affiini aliavaruus A, jolle $S \subseteq A$ ja $\dim(A) \leq n$.

4. Olkoot V ja W reaalisia vektoriavaruuksia ja A V:n affiini aliavaruus. Olkoot $f, g\colon A \to W$ affiineja kuvaus, $b \in W$ ja $t \in \mathbb{R}$. Todista, että

a) Vakiokuvaus $h\colon A \to W$, $h(x) = b$ on affiini kuvaus.
b) Summakuvaus $f + g\colon A \to W$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ on affiini kuvaus.
c) Kuvaus $tf\colon A \to W$, $(tf)(x) = tf(x)$ on affiini kuvaus.

5. Määritä affiini kuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle $f(0, 0) = (2, 2)$, $f(0, 1) = (3, 4)$ ja $f(1, 0) = (4, 3)$.

6. Esitä esimerkki saman euklidisen avaruuden kahdesta affiinista aliavaruudesta, jotka ovat affiinisti isomorfisia mutteivät yhdensuuntaisia.