Tampereen yliopisto, ITC
Tietokonegrafiikan geometria
Harjoitus 4 (1. 2.)
Kevät 2023

Kaikissa tehtävissä oletetaan, että V on reaalinen vektoriavaruus.

1. Olkoot a, b, c ja d V:n pisteitä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla. Osoita, että jos $\ell(a,c) \cap \ell(b,d) \neq \emptyset$, niin pisteet a, b, c ja d ovat samassa tasossa.

2. Osoita V:n välissäolorelaation B seuraavat perusominaisuudet: Kun $a, b, c \in V$, niin seuraavat pitävät paikkansa:

a) $B(a,a,b)$.
b) Jos $B(a,b,a)$, niin $a = b$.
c) Jos $B(a,b,c)$, niin $B(c,b,a)$.

3. Olkoot $a, b, c \in V$. Osoita, että a, b, c ovat samalla suoralla, jos ja vain jos $B(a,b,c)$, $B(b,c,a)$ tai $B(c,a,b)$.

4. Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^m$ määritellään tunnetusti pistetulo kaavalla $x \cdot y = \sum_{i=0}^{m-1} x_i y_i$, kun $x = (x_0, \ldots, x_{m-1}), y = (y_0, \ldots, y_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$. Olkoot $n \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ ja $s \in \mathbb{R}$. Osoita, että

$$A = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x \cdot n = s\}$$

on $\mathbb{R}^m$:n affiini aliavaruus.

5. Olkoot m, n, s ja A kuten edellisessä tehtävässä. Todista, että A:n suunta-avaruus on

$$U = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x \cdot n = 0\}.$$

Osoita myös, että esityksessä $A = a + U$ piste $a \in A$ voidaan valita niin, että $|a| \leq |x|$ kaikilla $x \in A$. Mikä on tällöin $|a|$ eli affiinin avaruuden A etäisyys origosta? (Vektorin $x \in \mathbb{R}^m$ itseisarvo on määritelmän mukaan $|x| = \sqrt{x \cdot x}$.)

6. Olkoon V äärellisulotteinen reaalinen vektoriavaruus, jolle $\dim(V) = n \in \mathbb{Z}_+$ ja H sen hypertaso, ts. affiini aliavaruus, jolle $\dim(H) = n-1$. Määritellään $V \setminus H$:n relaatio $\sim$ seuraavasti:

$$x \sim y, \text{ jos ja vain jos } [x,y] \cap H = \emptyset.$$

Osoita, että $\sim$ on joukon $V \setminus H$ ekvivalenssirelaatio, jolla on kaksi ekvivalenssiluokkaa. Miten kuvailisit tilannetta?