Tampereen yliopisto, ITC
Tietokonegrafiikan geometria
Harjoitus 5 (8. 2.)
Kevät 2023

Kaikissa tehtävissä oletetaan, että V on reaalinen vektoriavaruus.

1. Olkoot $a, b, c, d \in V$. Oletetaan, että $a \neq b$. Osoita, että jos $B(a, b, c)$ ja $B(a, b, d)$, niin $B(a, c, d)$ tai $B(a, d, c)$.

2. Miten monella eri tavalla viisi pistettä voi sijaita euklidisessa tasossa $\mathbb{R}^2$ välissäolorelaation suhteen? Tässä siis viiden pisteen joukkoja $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ja $T \subseteq \mathbb{R}^2$ pidetään samanlaisina, jos on olemassa välissäolorelaation vahvasti säilyttävä bijektio $f\colon S \to T$, ts. kaikilla $x, y, z \in S$ pätee

$$B(x, y, z), \text{ jos ja vain jos } B(f(x), f(y), f(z)).$$

3. Olkoon $S \subseteq V$. Tällöin $\operatorname{Aff}(S)$ on V:n affiini aliavaruus.

4. Olkoon $I \subseteq V$ epätyhjä. Osoita, että seuraavat ovat yhtäpitäviä:

a) I on affiinisti riippumaton.
b) Jokaisella $x \in I$ joukko $\{y - x \mid y \in I,\ y \neq x\}$ on vapaa.
c) Jollakin $x \in I$ joukko $\{y - x \mid y \in I,\ y \neq x\}$ on vapaa.

5. Miksi $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$ on taso? Määritä sille affiini kanta.

6. Joukko A sisältäköön ne vektorit $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^5$, jotka ovat yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_2 - 2x_4 = 1 \\ x_0 + x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

ratkaisuja. Selitä, miksi A on $\mathbb{R}^5$:n affiini aliavaruus ja määritä sen dimensio.