

Tehtäviä on kahdella sivulla.

1. Lineaarialgebrasta tunnetaan seuraava tulos:

Olkoon V vektoriavaruus, I vapaa V :ssä ja S V :n virittäjäistö. Oletetaan, että $I \subseteq S$. Tällöin V :llä on kanta E , jolle $I \subseteq E \subseteq S$.

Todista vastaava affiinin geometrian tulos: Olkoon A vektoriavaruuden V affiini aliavaruus, $I \subseteq A$ affiinisti riippumaton ja S A :n affiini virittäjäistö. Oletetaan, että $I \subseteq S$. Tällöin A :lla on affiini kanta E , jolle $I \subseteq E \subseteq S$.

2. Muodosta jokin affiini isomorfismi \mathbb{R}^3 :n tasojen

$$A = \{(x, y, x + y + 3) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \text{ ja } B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 3z = 2\}$$

välille.

3. Tarkastellaan projektiivista avaruutta $P = P(\mathbb{R}^3)$ ja joukkoja

$$A = \{(x, y, z) \mid z = 1\} \text{ ja } B = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}.$$

- a) Selitä, miksi A ja B ovat (hyper)tasoja mutteivat kuitenkaan \mathbb{R}^3 :n vektoriavaruuksia. [B :n suhteen osa tästä käsiteltiin jo edellisessä harjoituksessa.]
- b) Esitä esimerkki projektiivisestä pisteestä $(a : b : c) \in P(\mathbb{R}^3)$, joka on sekä A :n että B :n suhteen äärettömyyspiste.
4. Jatkoa edelliseen tehtävään:
- c) Esitä esimerkki projektiivisestä pisteestä $(a' : b' : c') \in P(\mathbb{R}^3)$, joka on A :n mutta ei B :n suhteen äärettömyyspiste.
- d) Esitä esimerkki projektiivisestä pisteestä $(a'' : b'' : c'') \in P(\mathbb{R}^3)$, joka on B :n mutta ei A :n suhteen äärettömyyspiste.

5. Joukot

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 5\} \text{ ja } \ell = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 0\}$$

ovat molemmat euklidisen tason \mathbb{R}^2 suoria. Tarkastellaan kuitenkin suoraa H euklidisen tason hypertasona ja suoraa ℓ projektiivisen avaruuden $P(\mathbb{R}^2)$ pisteenä. Esitä ℓ homogeenisten koordinaattien avulla niin, että esityksestä pystyy lukemaan H :n ja ℓ :n leikkauspisteen. Avaruudella $P(\mathbb{R}^2)$ on yksi ainoa äärettömyyspiste hypertason H suhteen. Mikä se on? Etsi sillekin homogeeninen koordinaattiesitys.

6. Olkoon $(K, +), \cdot$ q -alkiainen kunta, missä q on pariton alkulukupotenssi. Olkoon edelleen V K -vektoriavaruus, jolle $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$.

- a) Kuinka monta alkia on missä tahansa V :n affiinissa suorassa?
- b) Kuinka monta alkia on projektiivisessä avaruudessa $P(V)$?