

Tehtäviä on kahdella sivulla.

1. Merkitään

$$C = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

ja

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}.$$

Joukko C on tietenkin euklidisen avaruuden \mathbb{R}^3 (hyper)tasoon \mathbb{R}^2 sisältyvä ympyrä. Tarkastellaan edelleen luennoilla esitettyä upotusta $j: H \rightarrow P(\mathbb{R}^3)$, $j(x, y, 1) = \text{sp}(\{(x, y, 1)\})$. Määritä $\bigcup j[C] = \bigcup_{x \in C} j(x)$. Mikä geometrinen kappale se on?

2. Luennoilla todistettiin seuraavat äärellisulotteista projektiivista avaruutta $P(V)$ koskevat tulokset:

Kun $\ell, m \in P(V)$, $\ell \neq m$, niin on olemassa yksikäsitteinen projektiivinen suora $S \subseteq P(V)$, joka kulkee pisteiden ℓ ja m kautta.

ja sen jälkeen

Olkoot X ja Y projektiivisen avaruuden $P(V)$ aliavaruuksia. Tällöin

$$\dim(X + Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y).$$

Osoita, että jälkimmäisestä seuraa itse asiassa edellinen.

3. Olkoot X ja Y projektiivisen avaruuden $P(V)$ aliavaruuksia, missä $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$. Osoita, että

$$\dim(X \cap Y) \geq \dim(X) + \dim(Y) - n.$$

Näytä, että erityisesti $X \cap Y$ on epätyhjä, jos $\dim(X) + \dim(Y) \geq n$.

4. Olkoon T projektiivinen taso. Osoita, että on olemassa neljä pistettä, joista mitkään kolme eivät sijaitse samalla T :n projektiivisellä suoralla.

5. Projekttiiviselle tasolle tunnetaan seuraava aksiomatisointi:

PT1) Kahden projekttiivisen pisteen kautta kulkee aina yksikäsitteinen projekttiivinen suora.

PT2) Kaksi projekttiivistä suoraa leikkaa aina yksikäsitteisessä projekttiivisessä pisteessä.

PT3) On olemassa neljä projekttiivistä pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla.

Todista näiden pohjalta seuraavat väitteet:

a) Jokaisella suoralla on vähintään kolme pistettä.

b) Projekttiivisessä tasossa on vähintään seitsemän pistettä.

6. Esitä esimerkki projekttiivisestä kuvauksesta $f: P(\mathbb{R}^2) \rightarrow P(\mathbb{R}^2)$, jolle $f(1 : 0) = (1 : 0)$, $f(0 : 1) = (0 : 1)$, mutta f ei ole identtinen kuvaus. Mitä arvoja $f(1 : 1)$ voi saada?