

Nämä ovat esitietoharjoitukset. Tehtäviä on kahdella sivulla.

1. Neliön symmetriaryhmä $\mathbb{D}_8 = (D_8, \circ)$ on helpointa kuvata neliön kärkien a, b, c ja d permutaatioryhmänä, jonka virittävät kierto $s = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$ ja peilaus $t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Määritä ryhmän \mathbb{D}_8 kaikki alkiot.
2. Palauta mieleesi Lagrangen lause ja määritä \mathbb{D}_8 :n kaikki aliryhmät.

Trigonometriset funktiot $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kiinnittyvät täysin seuraavien ehtojen kautta:

- 1) $\cos(0) = 1$ ja $\sin(0) = 0$.
- 2) $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$, kun $x \in \mathbb{R}$.
- 3) Sini ja kosini toteuttavat summakaavat

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y) \text{ ja} \\ \cos(x + y) &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)\end{aligned}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Seuraavat tehtävät on tarkoitus tehdä näiden ehtojen pohjalta.

3. Todista kosinin parillisuus ja sinin parittomuus, ts. että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$\cos(-x) = \cos(x) \text{ ja } \sin(-x) = -\sin(x).$$

[Sovella ensin summakaavoja kulmasummaan $x + (-x)$. Ehdon 1 avulla saat yhtälöparin, josta voit ratkaista $\cos(-x)$:n ja $\sin(-x)$:n arvojen $\cos(x)$ ja $\sin(x)$ avulla. Huomaa, että yhtälöparin ratkaisemisessa tarvitset ehtoa 2.]

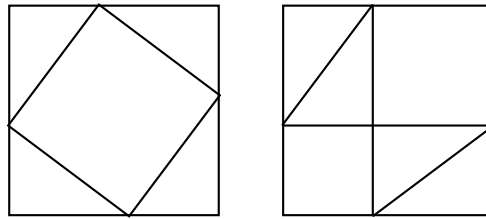
4. a) Todista, että kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ pätee

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

- b) Todista, että kaikille $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$1 - \cos(x) = 2 \left(\sin \left(\frac{x}{2} \right) \right)^2.$$

5. Esitä Pythagoraan lauseelle perinteinen, pinta-alatarkasteluja käyttävä todistus, joka perustuu seuraaviin kuvioihin.



6. Todista Pythagoraan lauseen käänteislause: Jos kolmion sivujen pituuksille a , b ja c pätee $a^2 + b^2 = c^2$, niin kolmio on suorakulmainen.