Tampereen yliopisto, ITC
Euklidinen geometria
Harjoitus 2 (15. 3.)
Kevät 2023

Kolmessa ensimmäisessä tehtävässä todennetaan tiettyjä Tarskin geometrian aksioomia standardimallissa $(\mathbb{R}^n, B, \equiv)$, *missä* $n \geq 2$.

1. Janankonstruktioaksiooma eli Tarskin aksiooma 4 on:

$$\forall a, b, c, d\ \exists x\ (bx \equiv cd \wedge B(a, b, x)).$$

a) Kirjoita, mitä tämä tarkoittaa standardimallissa eli avaa käytetyt merkinnät.

b) Todista janankonstruktioaksiooma standardimallissa.

2. Todenna kolmas kongruenssiaksiooma

$$\forall a, b, c\ (ab \equiv cc \rightarrow a = b)$$

standardimallissa.

3. Todenna Tarskin aksioomien standardimallissa, että aksiooma 8 eli

$$\forall a, b, c, d\ (B(a, b, c) \wedge B(a, b, d) \wedge a \neq b \rightarrow (B(a, c, d) \vee B(a, d, c)))$$

pätee.

Kolmessa seuraavassa tehtävässä sen sijaan lähtökohtana ovat itse aksioomat. Todista tehtävät Tarskin aksioomajärjestelmässä $\mathrm{EG}^{(2)}$.

4. Todista Tarskin aksioomajärjestelmässä, että kaikilla pisteillä a ja b pätee $B(a, b, b)$.

5. Todista janankonstruktioaksiooman avulla, että aksioomat 3 ja 6 voidaan vahventaa muotoon, jossa implikaation tilalla on ekvivalenssi, so. kaikilla pisteillä a, b ja c pätee 3) $ab \equiv cc$, jos ja vain jos $a = b$, ja 6) $B(a, b, a)$, jos ja vain jos $a = b$.

6. Osoita, että Tarskin aksioomajärjestelmässä voidaan todistaa, että kaikille avaruuden pisteille a, b ja c pätee $B(a, b, c)$, jos ja vain jos $B(c, b, a)$. [Vihje: Sovella Paschin aksioomaa.]