1.

I	s	s^2	s^3
a b d c	d a c b	c d b a	b c a d
d c a b	a d b c	b a c d	c b d a
t	st	s^2t	s^3t

Ryhmän D_8 alkiot

id (a)

s (abcd)

s^2 (ac)(bd)

s^3 (ad cb)

t (ab) (cd)

st (ac)

s^2t (ad) (cb)

s^3t (bd)

2. Lagrangen lause: Äärellisen ryhmän aliryhmän kertaluku jakaa tasan ryhmän kertaluvun. n |H|

$\Rightarrow$ ryhmän kertaluku 8

$\Rightarrow$ Aliryhmissä 1, 2, 4 tai 8 alkiota

Aliryhmien oltava suljettuja.

1. D_8 (8 alkiota)
2. $\{id\}$
3. $\{id, s^2\}$
4. $\{id, s, s^2, s^3\}$
5. $\{id, t\}$
6. $\{id, st\}$
7. $\{id, s^2t\}$
8. $\{id, s^3t\}$
9. $\{id, s^2, \cancel{s}t, s^2t\}$
10. $\{id, s^2, st, s^3t\}$

Jos otettaisiin id, s $\Rightarrow$ päädytään s^2 kohtaan, jota ei ole permutaatiossa mukana.

3. Väite $\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$

Tod.
$$
\begin{aligned}
0 &\overset{1}{=} \sin(0) \\
&= \sin(x-x) \\
&= \sin(x+(-x)) \\
&\overset{3}{=} \sin(x)\cos(-x) + \sin(-x)\cos(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &\overset{1}{=} \cos(0) \\
&= \cos(x-x) \\
&\overset{3}{=} \cos(x+(-x)) \\
&= \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
0 = \sin(x)\cos(-x) + \sin(-x)\cos(x) & (1) \\
1 = \cos(x)\cos(-x) - \sin(x)\sin(-x) & (2)
\end{cases}
$$

$(1) \cdot \sin(x) + (2) \cdot \cos(x)$

$$
\Rightarrow \begin{aligned}
0 &= \sin^2 x \cos(-x) + \sin(x)\cos(x)\sin(-x) \\
+ \cos(x) &= \cos^2 x \cos(-x) - \sin(x)\cos(x)\sin(-x)
\end{aligned}
$$

$$\cos x \overset{2}{=} \cos(-x) + 0$$

$(1) \cos x + (2) \sin x$

$$
\Rightarrow \begin{cases}
0 = \sin x \cos x \cos(-x) + \sin(-x)\cos^2 x \\
-\sin x = \sin x \cos x \cos(-x) - \sin^2 x \sin(-x)
\end{cases}
$$

$$-\sin x = \sin(-x)$$

EUKLIDINEN GEOMETRIA
HARJOITUS 1

4. a) Todista, että $\forall x, y \in \mathbb{R}$ pätee
$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$\sin x - \sin y$ $\qquad x = A + B, \quad y = A - B$

$= \sin(A+B) - \sin(A-B)$

$= \sin A\cos B + \cos A\sin B - \sin A\cos(-B) - \cos A\sin(-B)$

$= \cancel{\sin A\cos B} + \cos A\sin B - \cancel{\sin A\cos B} + \cos A\sin B$

$= 2\cos A\sin B$

$= 2\cos\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$ $\square$

$x + y = A + B + A - B = 2A \qquad A = \frac{x+y}{2}$

$x - y = A + B - A + B = 2B \qquad B = \frac{x-y}{2}$

b) Todista, että $\forall x \in \mathbb{R}$ pätee
$$1 - \cos x = 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$$

$1 - \cos x$

$= 1 - \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$

$= 1 - \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$

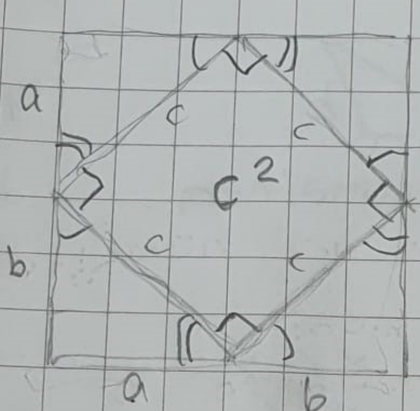
$= 1 - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$

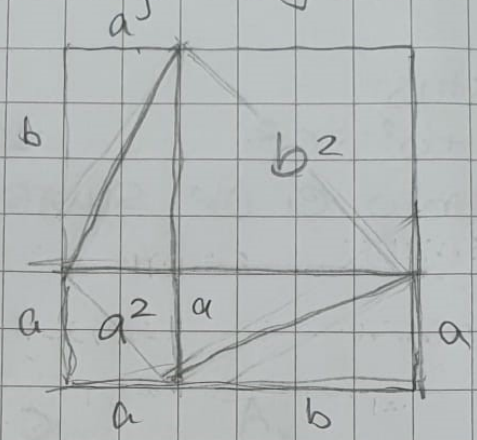
$= \sin^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$

$= 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$ $\square$

EUKLIDINEN GEOMETRIA
HARJOITUS 1

5. Esitä Pythagoraan lauseelle perinteinen, pinta-alatarkastelujа käyttävä todistus.



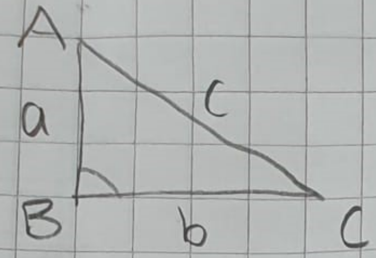


$$(a+b)(a+b) = a^2+b^2+4\cdot\tfrac{1}{2}ab$$

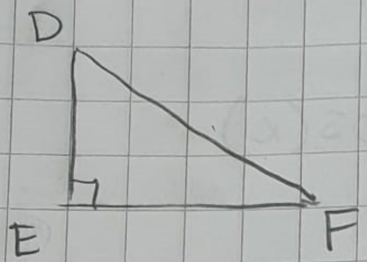
$$(a+b)^2 = c^2+4\cdot\tfrac{1}{2}ab$$

$$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 = c^2+2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2 = c^2 \quad \square$$



$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$\begin{aligned} \overline{DF}^2 &= \overline{DE}^2 + \overline{EF}^2 \\ &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \\ &= \overline{AC}^2 \\ &= c^2 \end{aligned}$$

$$\overline{DF} = \overline{AC}$$

$$\overline{AB} = \overline{DE}$$
$$\overline{BC} = \overline{EF}$$

⇒ Kolme yhtäpitkää sivua
⇒ Kaksi yhtenevää kolmiota
⇒ Kulmien suuruudet ovat samat
⇒ Kolmion on oltava suorakulmainen.