Harjoitus 2

Standardimalli $(\mathbb{R}^n, B, \equiv)$, $n \geq 2$:

- Välissäolorelaatio

  $$B = \{ (x,y,z) \in (\mathbb{R}^n)^3 \mid \exists \lambda \in [0,1] : y = \lambda x + (1-\lambda) z \}$$

- janojen samanpituisuus

  $$\forall\, x,y,z,t \in \mathbb{R}^n : \quad \equiv (x,y,z,t) \Leftrightarrow |x-y| = |z-t| .$$

2.1 Janankonstruktioaksiooma eli Tarskin aksiooma 4:

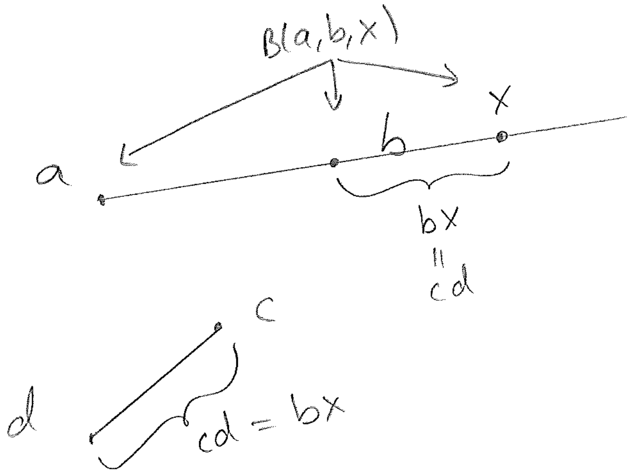
$$\forall\, a,b,c,d\ \exists x\ (bx \equiv cd \wedge B(a,b,x))$$

a) Tämä tarkoittaa, että valitaanpa mitkä tahansa 4 pistettä a, b, c ja d, niin on olemassa sellainen piste x, että

1° janat bx ja cd ovat samanpituiset ja

2° piste b on pisteiden a ja x välissä.

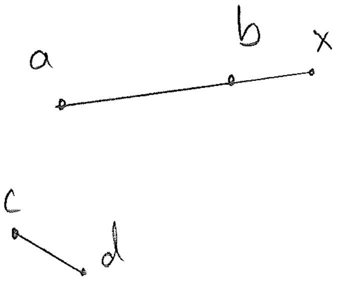
Hahmotelma:



b) Janankonstruktioaksiooma pätee standardimallissa:

Olkoot a, b, c ja d mielivaltaisia pisteitä.

Etsitään x, jolle $B(a,b,x)$ ja $|b-x| = |c-d|$.



Koska $B(a,b,x)$, niin $x \in l(a,b)$, eli

$$x = ra + (1-r)b \text{, jollakin } r \in \mathbb{R}.$$

Koska $B(a,b,x)$, niin $r \geq 0$.

Nyt $|c-d| = |b-x| = |b - ra - (1-r)b| = |-ra + rb| = r|b-a|$

eli $r = \dfrac{|c-d|}{|b-a|}$.

Saadaan $x = \dfrac{|c-d|}{|b-a|} a + \left(1 - \dfrac{|c-d|}{|b-a|} b\right)$, eli tällainen

x on olemassa.

2.2 Todenna kongruenssiaksiooma (Tarski (3))

$$\forall a,b,c \ (ab \equiv cc \rightarrow a=b)$$

standardimallissa.

Jos $ab \equiv cc$, niin $|a-b| = |c-c| = 0$.

Tästä seuraa, että $a-b=\bar{0}$. (*)

Nyt, jos x on sellainen, että $B(a,x,b)$, niin

$$\begin{aligned} x &= \lambda a + (1-\lambda) b \quad \text{jollakin } \lambda \in [0,1] \\ &= b + \lambda(a-b) = b + \bar{0} = b \end{aligned}$$

ja toisaalta

$$\begin{aligned} x &= \lambda a + (1-\lambda) b \quad \text{jollakin } \lambda \in [0,1] \\ &= (\lambda-1)a + a + (1-\lambda)b \\ &= a + (\lambda-1)(a-b) = a + \bar{0} = a, \end{aligned}$$

joten

$$a = x = b,$$

eli $a=b$.

(*) Jos emme halua tiedosta $|a-b|=0$ vielä päätellä, että $a=b$, voidaan se perustella välissäolon kautta seuraavasti.

③ Väite: Standardimallissa pätee $\forall a,b,c,d\,(B(a,b,c) \wedge B(a,b,d) \wedge a \neq b \rightarrow (B(a,c,d) \vee B(a,d,c)))$

Tod.

Olkoot $a,b,c,d \in \mathbb{R}^2$.

Ol., että $B(a,b,c)$, $B(a,b,d)$ ja $a \neq b$.

Välissäolon määritelmän mukaan tällöin

$$b = ta + (1-t)c \quad , t \in [0,1]$$

ja $$b = va + (1-v)d \, , v \in [0,1].$$

Saadaan siis

$$va + (1-v)d = ta + (1-t)c$$

Edelleen $$d = \frac{t-v}{1-v}a + \frac{1-t}{1-v}c \quad , 1-v \neq 0.$$

Jos $1-v = 0$, niin $a = b$, mikä olisi ristiriita.

Siis $$d = \frac{t-v}{1-v}a + \frac{1-t}{1-v}c$$

$$= \frac{t+1-1-v}{1-v}a + \frac{1-t}{1-v}c$$

$$= \frac{1-t}{1-v}c + \left(1 - \frac{1-t}{1-v}\right)a$$

(3) Jatkuu

Jos nyt $\frac{1-t}{1-v} \in [0,1)$, niin myös $w = 1 - \frac{1-t}{1-v} \in (0,1)$.

Tällöin siis

$d = (1-w)c + wa = wa + (1-w)c$, joten $B(a,d,c)$.

Jos taas $\frac{1-t}{1-v} \in]1,\infty[$, niin:

$d = \frac{1-t}{1-v} c + \left(1 - \frac{1-t}{1-v}\right) a \quad \| \cdot \frac{1-v}{1-t}$, $1-t \neq 0$ (jos olisi $1-t=0$, niin $a=b$, mikä olisi ristiriita)

$\rightarrow \frac{1-v}{1-t} d = c + \left(\frac{1-v}{1-t} - 1\right) a$

$\rightarrow c = \frac{1-v}{1-t} d + \left(1 - \frac{1-v}{1-t}\right) a$

Tästä saadaan edelleen pääteltyä $B(a,d,c)$ kuten edellä. $\square$

(4) V: Tarskin aksioomajärjestelmässä $\forall a,b\,(B(a,b,b))$.

Tod.

Olkoot a ja b pisteitä.

Aksiooman 4 nojalla

$bx \equiv cc \wedge B(a,b,x)$ jollakin x (on siis valittu $c=d$).

Aksiooman 3 nojalla

$b=x$, joten $B(a,b,b)$. $\square$

⑤ V.t. Tarskin aksioomajärjestelmässä pätee $\forall a,b,c\,(ab \equiv cc \leftrightarrow a=b)$

ja $\forall a,b\,(B(a,b,a) \leftrightarrow a=b)$.

Tod. Todistetaan ensin, että $\forall a,b,c\,(ab \equiv cc \leftrightarrow a=b)$.

Olkoot $a,b,c \in \mathbb{R}^n$.

Suunta $ab \equiv cc \rightarrow a=b$ on suoraan Tarskin 3. aksiooma.

Oletetaan siis, että $a=b$.

Janan konstruktioaksiooman nojalla saadaan tällöin

$bx \equiv cc \wedge B(a,b,x)$ jollakin $x \in \mathbb{R}^n$

(tässä on siis valittu $c=d$)

Tällöin saadaan edelleen 3. aksiooman nojalla

$b=x$. ja koska $b=a$, niin $b=x=a$.

Aiemmin pääteltiin $bx \equiv cc$, josta saadaan nyt sijoituksilla

$b=a$ ja $x=b$

$ab \equiv cc$.

Todistetaan sitten, että $\forall a,b\,(B(a,b,a) \leftrightarrow a=b)$.

Suunta $B(a,b,a) \rightarrow a=b$ on suoraan 6. aksiooma.

Oletetaan siis, että $a=b$.

Vastaavasti kuin edellä päätellään, että

$bx \equiv cc \wedge B(a,b,x)$ jollakin $x \in \mathbb{R}^n$,

ja $b=x=a$.

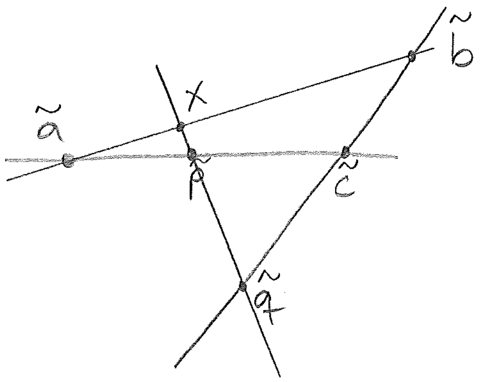
Siispä yksinkertaisella sijoituksella saadaan $B(a,b,a)$, mikä todistaa väitteen. □

(2.6) **Väite:** $\forall a,b,c\ (B(a,b,c) \leftrightarrow B(c,b,a))$

Todistus (Tarskin aksioomajärjestelmässä)

Paschin aksiooma (9):

$$\forall \tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{p},\tilde{q}\ \Big(\big(B(\tilde{a},\tilde{p},\tilde{c}) \wedge B(\tilde{b},\tilde{c},\tilde{q}) \big) \rightarrow \exists x\ \big(B(\tilde{a},x,\tilde{b}) \wedge B(\tilde{q},\tilde{p},x) \big) \Big)$$



Paschin aksiooman pisteisiin lisätty aaltoviivat, jotta eivät mene sekaisin väitteen pisteiden a, b, c kanssa.

"$\rightarrow$" Oletetaan, että $B(a,b,c)$. Lisäksi (tehtävä 2.4) pätee $B(a,b,b)$. Paschin aksiooman nojalla (*)

$$B(a,b,b) \wedge B(a,b,c) \rightarrow \exists x\ \big(B(a,x,a) \wedge B(c,b,x) \big)$$

Aksiooman 6 mukaan $B(a,x,a) \rightarrow x=a$, joten pätee $B(c,b,a)$.

"$\leftarrow$" Oletetaan $B(c,b,a)$. Lisäksi (teht 2.4) $B(c,b,b)$, ja Paschin aksiooman mukaan (**)

$$B(c,b,b) \wedge B(c,b,a) \rightarrow \exists x\ \big(B(c,x,c) \wedge B(a,b,x) \big).$$

Nyt $B(c,x,c) \rightarrow x=c$ (Aksiooma 6), eli $B(a,b,c)$.

$\square$

(*) Tässä valittu Paschin aksiooman pisteiksi $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{p}$ ja $\tilde{q}$ väitteen pisteet a,b ja c seuraavasti:

$$\tilde{a} = \tilde{b} = a$$
$$\tilde{p} = \tilde{c} = b$$
$$\tilde{q} = c$$

eli

$$\begin{array}{ccccccc} B(\tilde{a},\tilde{p},\tilde{c}) & \wedge & B(\tilde{b},\tilde{c},\tilde{q}) & \xrightarrow{} \exists x & B(\tilde{a},x,\tilde{b}) & \wedge & B(\tilde{q},\tilde{p},x) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ B(a,b,b) & \wedge & B(a,b,c) & \xrightarrow{} \exists x & B(a,x,a) & \wedge & B(c,b,x) \end{array}$$

(**) Tässä valittu Paschin aksioomaan

$$\tilde{a} = \tilde{b} = c$$
$$\tilde{p} = \tilde{c} = b$$
$$\tilde{q} = a,$$

eli

$$\begin{array}{ccccccc} B(\tilde{a},\tilde{p},\tilde{c}) & \wedge & B(\tilde{b},\tilde{c},\tilde{q}) & \rightarrow \exists x \big(& B(\tilde{a},x,\tilde{b}) & \wedge & B(\tilde{q},\tilde{p},x)\big) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ B(c,b,b) & \wedge & B(c,b,a) & \rightarrow \exists x \big(& B(c,x,c) & \wedge & B(a,b,x)\big) \end{array}$$