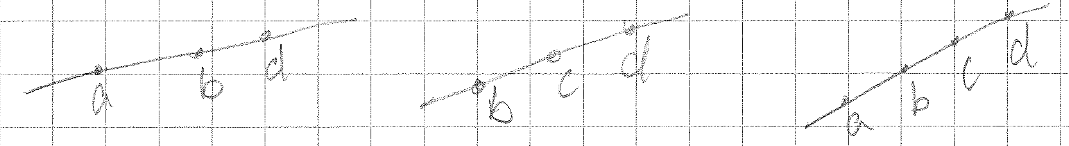
Euklidinen geometria
Harjoitus 3

1. Osoita, että Tarskin aksiooma 7 eli välissäolon sisäinen transitiivisuus pätee standardimalleissa:

$$\forall a,b,c,d\,(B(a,b,d)\wedge B(b,c,d)\to B(a,b,c))$$

Olk. $B(a,b,d)$ ja $B(b,c,d)$



Nyt $b = \lambda a + (1-\lambda)b \, , \quad \lambda \in [0,1]$
$c = \mu b + (1-\mu)d \, , \quad \mu \in [0,1]$

(tavoite: $b = \square a + (1-\square)c$)

Ratkaistaan 1. yhtälöstä

$$d = \frac{b-\lambda a}{1-\lambda} \quad (\text{tai } \lambda = 1)^{*}$$

$*$ Jos $\lambda = 1$, niin $b = a$ ja $B(a,b,c) = B(a,a,c)$, mikä on aina totta, sillä kaikilla a ja c pätee $a = \lambda a + (1-\lambda)c$, kun $\lambda = 1$.

Sijoittamalla d saadaan $c = \mu b + (1-\mu)\dfrac{b-\lambda a}{1-\lambda}$

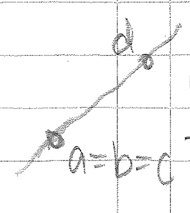
$$\Rightarrow \quad b = \frac{\lambda(\mu-1)}{1-\lambda\mu}a + \underbrace{\frac{1-\lambda}{1-\lambda\mu}}_{=1-\frac{\lambda(\mu-1)}{1-\lambda\mu}}c \quad (\text{tai } 1-\lambda\mu = 0)^{**}$$

Koska
$\lambda(\mu-1) \geq 0$, sillä $\lambda \geq 0$ ja $\mu \leq 1$ ja $1-\lambda\mu \geq 0$, sillä $\lambda, \mu \in [0,1]$

$$\Rightarrow \quad \frac{\lambda(\mu-1)}{1-\lambda\mu} \geq 0$$

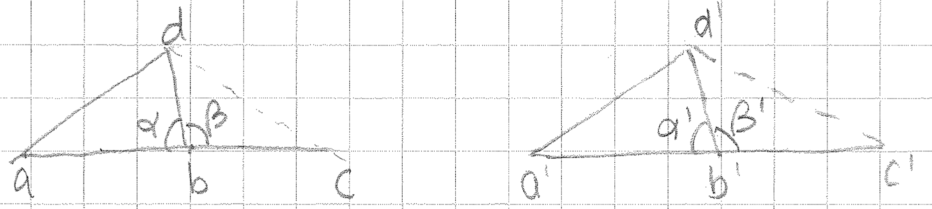
Koska $\lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda - \lambda\mu \leq 1 - \lambda\mu \Rightarrow \dfrac{\lambda-\lambda\mu}{1-\lambda\mu} \leq 1$

$**$ Jos $1-\lambda\mu = 0$, niin $\lambda\mu = 1$, eli $\lambda = \mu = 1$.
Tällöin $b = a$ ja $c = b$.
Nyt $B(a,b,c)$ on sama kuin $B(a,a,a)$, mikä on totta, sillä $a = \lambda a + (1-\lambda)a$, esim. kun $\lambda = \frac{1}{2}$.



2. Osoita, että viiden janan aksiooma (Tarskin aksiooma 5) pätee standardimallissa eli todista ko. aksiooma analyyttisen geometrian menetelmin.

$\forall a,b,c,d,a',b',c',d' \, (a \neq b \wedge B(a,b,c) \wedge B(a',b',c')$
$\wedge \, ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ad \equiv a'd' \wedge bd \equiv b'd' \rightarrow cd \equiv c'd'$



Oletuksen perusteella $ab \equiv a'b'$, $bd \equiv b'd'$ ja $ad \equiv a'd'$
$\rightarrow$ kolmiot $abd \cong a'b'd'$
Siis $\alpha = \alpha'$ $\rightarrow$ suplementtikulmat $\beta = \beta'$
Nyt $dbc \cong d'b'c'$, sillä $\beta = \beta'$, $bc \equiv b'c'$, $bd \equiv b'd'$
Täten $cd \equiv c'd'$. $\square$

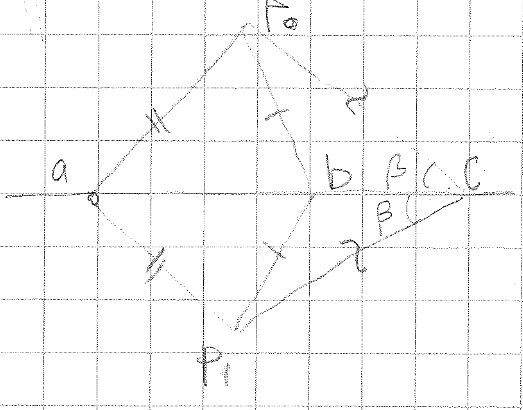
Euklidinen geometria
Harjoitus 3

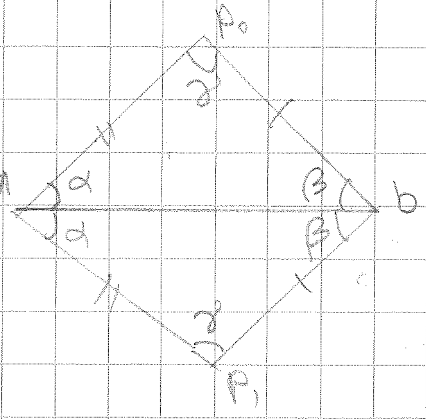
3. Todista, että Tarskin aksioomajärjestelmässä $EG^{(2)}$ dimensioaksioomat eli tason dimensioaksioomat 10 ja 11 ovat tottä euklidisessa tasossa $(\mathbb{R}^2, B, \equiv)$

Aksiooma 10
$\exists a,b,c\,(\neg B(a,b,c) \wedge \neg B(b,c,a) \wedge \neg B(c,a,b))$
Aksiooma 11
$\forall a,b,c,p_0,p_1\,((p_0 \neq p_1 \wedge ap_0 \equiv ap_1 \wedge bp_0 \equiv bp_1 \wedge cp_0 \equiv cp_1)$
$\Rightarrow B(a,b,c) \vee B(b,c,a) \vee B(c,a,b))$

On osoitettava, että a, b ja c ovat samalla suoralla. Tällöin joko $B(a,b,c)$, $B(b,c,a)$ tai $B(c,a,b)$.

Olk. $a=(1,0)$, $b=(0,1)$ ja $c=(1,1) \in \mathbb{R}^2$
Tällöin $b \neq \lambda a + (1-\lambda)c \quad \forall \lambda \in [0,1]$,
sillä $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1-\lambda\\1-\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1-\lambda\end{pmatrix} \quad \forall\lambda$ eli $\neg B(a,b,c)$
vastaavasti
$c \neq \mu b + (1-\mu)a \quad \forall \mu \in [0,1]$,
sillä $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\\mu\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1-\mu\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\mu\\\mu\end{pmatrix} \quad \forall\mu$ eli $\neg B(b,c,a)$
ja vielä $a \neq \delta c + (1-\delta)b \quad \forall \delta \in [0,1]$,
sillä $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}\delta\\\delta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1-\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta\\1\end{pmatrix} \quad \forall\delta$ eli $\neg B(c,a,b)$.





Tarkastellaan kolmiota Δabp_0 ja Δabp_1.
Näillä on kaksi yhtä pitkää sivua, $ap_0 \equiv ap_1$ ja $bp_0 \equiv bp_1$, ja yksi yhteinen, joten kolmiot ovat yhtenevät. Myös niiden kulmat ovat siis samansuuruiset
$\measuredangle p_0ab = \measuredangle p_1ab = \alpha$
$\measuredangle ap_0b = \measuredangle ap_1b = \gamma$
$\measuredangle p_0ba = \measuredangle p_1ba = \beta$

Vastaavasti myös kolmiot Δacp_0 ja Δacp_1 ovat yhtenevät, ja Δbcp_0 ja Δbcp_1 ovat yhtenevät

Tark. 3 tapausta:

1° Piste c sijaitsee nelikulmion ap_0bp_1 sisällä

2° Piste c sijaitsee nelikulmion ap_0bp_1 ulkopuolella, lähempänä pistettä a

3° Piste c sijaitsee nelikulmion ap_0bp_1 ulkopuolella, lähempänä pistettä c.

ap_0bp_1 ei ole surkastunut, sillä $p_0 \neq p_1$ (tai jos $a = b$, väite on triviaalisti tosi).

1° Koska kolmiot ovat yhteneviä,

$\measuredangle bcp_0 = \measuredangle bcp_1$ ja

$\measuredangle acp_0 = \measuredangle acp_1$

Toisaalta

$\measuredangle acp_0 + \measuredangle bcp_0 + \measuredangle acp_1 + \measuredangle bcp_1$

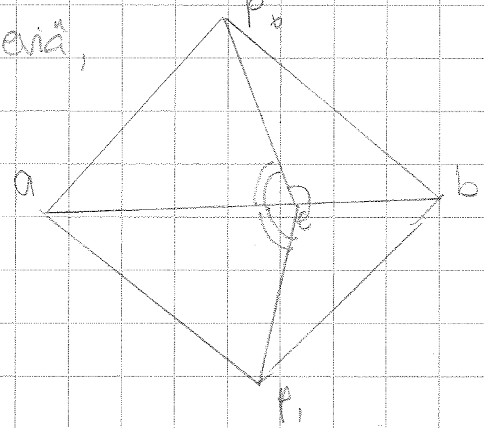
$= 360°$ joten

$2\measuredangle acp_0 + 2\measuredangle bcp_0 = 360°$

$\Rightarrow \measuredangle acp_0 + bcp_0 = 180°$

eli piste c on janalla ab

$\Rightarrow B(a, c, b)$.



2° Nyt kolmioiden yhtenevyydestä seuraa

$\measuredangle cap_0 = \measuredangle cap_1$ ja

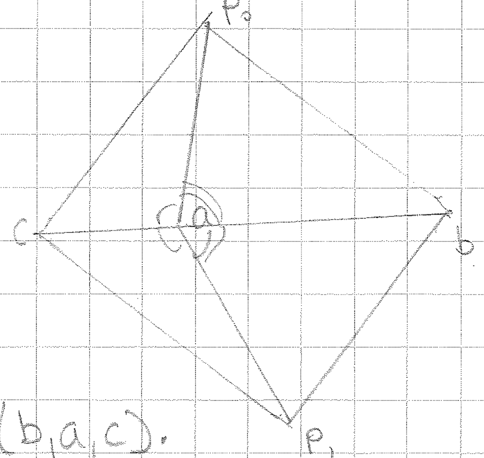
$\measuredangle bap_0 = \measuredangle bap_1$

Koska $\measuredangle cap_0 + \measuredangle bap_0 + \measuredangle bap_1 + \measuredangle p_1ac$

$= 360°$, niin saadaan

$\measuredangle cap_0 + \measuredangle bap_0 = 180°$

eli a on janalla bc ja siis $B(b, a, c)$.

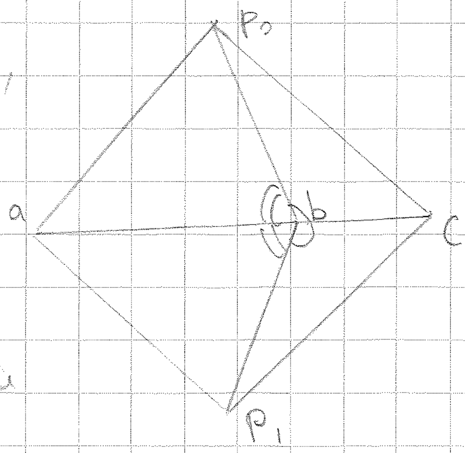


3° $\measuredangle cbp_0 = \measuredangle cbp_1$ ja $\measuredangle abp_0 = \measuredangle abp_1$,

joten $\measuredangle cbp_0 + \measuredangle abp_0 = 180°$

ja b on janalla ac

eli $B(a, b, c)$.



$B(a, c, b)$, $B(b, a, c)$ tai $B(a, b, c)$

$\Rightarrow$ Pisteet a, b ja c ovat samalla suoralla. □

3.4 Tarkastellaan avaruutta $(\mathbb{Q}^2, B^*, \equiv^*)$ eli standardimallin $(\mathbb{R}^2, B, \equiv)$ rajoittumaa rationaalikoordinaatteihin.

Mikä on ensimmäinen Tarskin aksioomista, joka ei ole tosi?

1. Totta: Olkoon $a, b \in \mathbb{Q}^2$.
$|a-b| = |(-1)(b-a)| = |-1||b-a| = |b-a|$, eli $ab \equiv^* ba$.

2. Totta: Olkoon $a, b, p, q, r, s \in \mathbb{Q}^2$.
Jos $|a-b| = |p-q|$ ja $|a-b| = |r-s|$, niin $|p-q| = |r-s|$.

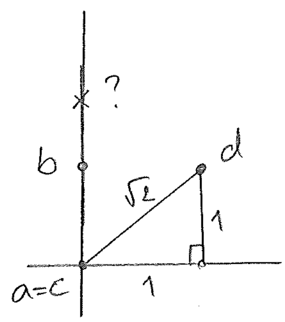
3. Totta: Olkoon $a, b, c \in \mathbb{Q}^2$
Jos $|a-b| = |c-c|$, niin $|a-b| = 0$, joten $a = b$.

4. Epätosi: Tehdään vastaesimerkki.

Olkoon $a = (0,0)$, $b = (0,1)$, $c = (0,0)$ ja $d = (1,1) \in \mathbb{Q}^2$.

Nyt $|c-d| = |(1,1) - (0,0)| = |(1,1)| = \sqrt{2}$.

Jos $x = (x_1, x_2)$ on a:n ja b:n kautta kulkevalla suoralla, sen on oltava muotoa $x = (0, x_2)$.



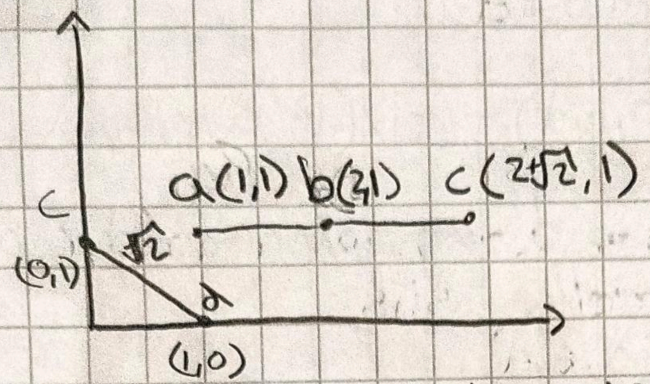
Nyt jos $bx \equiv cd$, niin
$$|b-x| = |(0,1) - (0, x_2)| = |1 - x_2| = |c-d| = \sqrt{2},$$
ja siis
$$x_2 = 1 - \sqrt{2} \quad \text{tai} \quad x_2 = 1 + \sqrt{2},$$
mutta kumpikaan ei ole rationaaliluku.

Aksiooman edellyttämää pistettä x ei siis ole.

$(4.\ \forall a, b, c, d\ \exists x\ (bx \equiv cd \land B(a,b,x)))$

T4 Mikä on ensimmäinen Tarskin aksiooma, joka ei ole totta $(\mathbb{Q}^2, B^*, \equiv^*)$?

$\forall a,b,c,d\ \exists x\,(bx \equiv cd,\ B(a,b,x))$



Tässä vielä toinen vastaesimerkki aksioomalle 4 rationaalikoordinaateissa.

Eli kolme ensimmäistä pitää paikkansa $\mathbb{Q}^2$:ssa ja TA 4 on ensimmäinen joka ei.

T5 Todista Tarskin aksioomajärjestelmässä, että jos $B(a,c,b)$, $B(a,b,d)$ ja $a \neq b$, niin $B(a,c,d)$.

Nyt TA 9 perusteella:

$B(a,c,b) \wedge B(a,b,d) \rightarrow \exists x\,(B(a,x,a) \wedge B(d,c,x))$.

Nyt TA 6:

$B(a,x,a) \Rightarrow a = x$, joten $B(d,c,a)$.

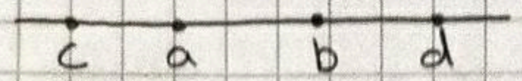
H2T6 perusteella siis

$B(d,c,a) \Rightarrow B(a,c,d)$.

Siispä $B(a,c,b) \wedge B(a,b,d) \wedge a \neq b \Rightarrow B(a,c,d)$. $\square$

T6. Todista Tarskin aksioomajärjestelmässä, että jos
$B(c,a,b) \wedge B(a,b,d) \wedge a \neq b \Rightarrow B(c,a,d)$

$\tilde{x}$ merkinnät ns. alkuperäisten aksioomien merkintöjä, johon sitten sijoitellaan



Tod. Olkoot a, b, c ja d pisteitä,
joille $a \neq b$, $B(c,a,b)$ ja $B(a,b,d)$.
Janan konstruktioaksiooman mukaan
on olem. x, jolle $ax = ac$ ja $B(d,a,x)$
($\tilde{b}x = \tilde{c}\tilde{d}$ ja $B(\tilde{a},\tilde{b},x)$, missä $\tilde{b} = a = \tilde{c}$, $\tilde{d} = c$ ja $\tilde{a} = d$.)

Nyt $B(d,a,x) \Rightarrow B(x,a,d)$ *aikaisempien harkkojen nojalla.
TA 7 nojalla:
$B(x,a,d) \wedge B(a,b,d) \Rightarrow B(x,a,b)$
$\left(B(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{d}) \wedge B(\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d}) \Rightarrow B(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}),\ \tilde{a} = x, \tilde{b} = a, \tilde{c} = b, \tilde{d} = d.\right)$
Siis $ax = ac$ ja $B(x,a,b)$, joka on yhtä kuin
$B(b,a,x)$ *

Käytetään viiden janan aksioomaa:
$(\tilde{a} \neq \tilde{b} \wedge B(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) \wedge B(\tilde{a}',\tilde{b}',\tilde{c}') \wedge \tilde{a}\tilde{b} \equiv \tilde{a}'\tilde{b}' \wedge$
$\tilde{b}\tilde{c} \equiv \tilde{b}'\tilde{c}' \wedge \tilde{a}\tilde{d} \equiv \tilde{a}'\tilde{d}' \wedge \tilde{b}\tilde{d} \equiv \tilde{b}'\tilde{d}') \Rightarrow \tilde{c}\tilde{d} \equiv \tilde{c}'\tilde{d}'$

Valinnoilla $\tilde{a} = \tilde{a}' = b$, $\tilde{b} = \tilde{b}' = a$, $\tilde{c} = c$, $\tilde{c}' = x$,
$\tilde{d} = \tilde{d}' = c$ saadaan

$b \neq a \wedge B(b,a,c) \wedge B(b,a,x) \wedge ba \equiv ba \wedge ac \equiv ax$
$\wedge\ bc \equiv bc \wedge ac \equiv ac \Rightarrow cc \equiv xc$,
joten TA3 mukaan $x = c$.

Näin ollen $B(d,a,x)$, joka konstruktiolemmalle saatiin, on yhtä kuin $B(d,a,c)$, joka * nojalla on $B(c,a,d)$. $\square$