Euklidinen geometria

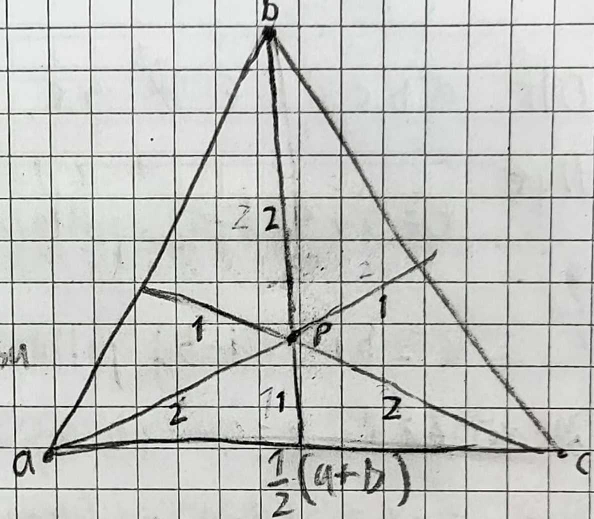
H4

1.

Olk. $a, b, c \in \mathbb{R}^2$

Olk. $p = \frac{1}{3}(a+b+c)$.

Osoitetaan, että p jakaa jokaisen keskijanan suhteessa 1:2 sivusta aloittaen.



$= a + \frac{1}{2}(b-a)$

Nyt $\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{3}\left(c - \frac{a+b}{2}\right)$

$= \frac{3a+3b}{6} + \frac{1}{3}c - \frac{a+b}{6}$

$= \frac{a+b+c}{3} = p$

Vastaavasti saadaan muut keskijanat.

Olk. $a, b, c, d, t \in \mathbb{R}^2$ s.e. $B(a,d,t)$, $B(b,d,c)$ ja $a \neq d$

Nyt

$$t = a + s(d-a) \quad \text{jollain } s > 1$$

ja

$$c = b + u(d-b) \quad \text{jollain } u > 1$$

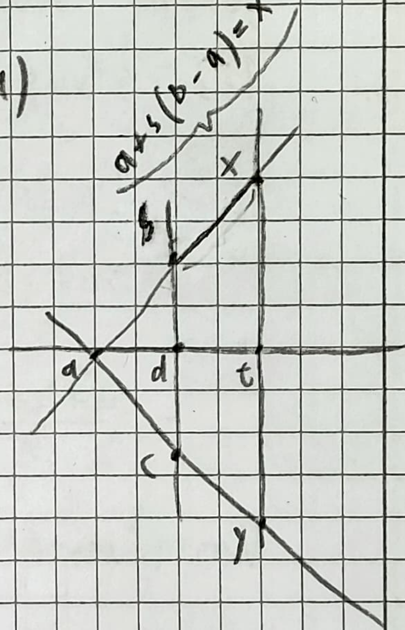
Merkitään $x = a + s(b-a)$ ja $y = a + s(c-a)$

Nyt
$$\begin{aligned} t - x &= s(d-a) - s(b-a) \\ &= s(d-b) \end{aligned}$$

Edelleen (s.j. $c = b + u(d-b)$)

$$\begin{aligned} y &= a + s(b + u(d-b) - a) \\ &= \underbrace{a + s(b-a)}_{=x} + us(d-b) \\ &= x + u(t-x), \quad \text{missä } u > 1, \end{aligned}$$

joten $B(x,t,y)$



3. Tehdään vastaoletus: on olemassa $v \in \ell$ s.e. $\forall b \in \ell$ $b \leq v$, siis v on suurin alkio.

Olkoon c, d pisteitä, joille $c \neq d$. TA4 perusteella

$$\exists x \; vx \equiv cd \wedge B(b, v, x)$$

Syntyy ristiriita, sillä $b \leq v \leq x$, ja ei päde $x \leq v$.

Pienimmän alkion tapaus osoitettaisiin vastaavasti.

(4) Olkoon $\leq$ suoran ℓ suunnistus ja olkoon $\leq'$ suoran ℓ eri suunnistus. Nyt on $x, y \in \ell$ s.e. $x \neq y$, $x \leq' y$ ja $x \nleq y$. Koska $\leq$ on vertailullinen, niin $y \leq x$.

Olkoon $u, v \in \ell$, $u \neq v$. Osoitetaan, että $u \leq' v \Leftrightarrow v \leq u$.
Käsitellään $\leq'$:n vertailullisuuden nojalla seuraavat tapaukset:

1) $x \leq' y \leq' u \leq' v$: Nyt $B(x, y, u)$ ja $B(y, u, v)$. Koska $y \leq x$, niin $u \leq y \leq x$, ja siis $v \leq u \leq y \leq x$. Siis erityisesti $v \leq u$, joten $x \leq' y \leq' u \leq' v$.

Loput tapaukset päätellään vastaavasti.

2) $x \leq' y \leq' v \leq' u$

3) $x \leq' u \leq' y \leq' v$

⋮

Siis kohtien 1) – 12) perusteella $u \leq' v \Leftrightarrow v \leq u$ kaikilla $u, v \in \ell$, joten $\leq' = \leq^{-1}$.

Siis suoralla on täsmälleen kaksi suunnistusta.

5. Lasketaan z^{2023}, kun

a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Nyt

$$z^2 = \frac{2}{4} + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{4} = i\frac{2\cdot 2}{2\cdot 2} = i.$$ Tällöin

$$z^{2023} = z^{2\cdot 1011+1} = i^{1011}\cdot z = i^{1010+1}\cdot z = (-1)(i)z = -\left(i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $z = 1 - i$. Nyt

$$z^2 = (1-i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i,$$ jolloin $z^4 = (-2i)^2 = -4$. Nyt

$$z^{2023} = z^{1+2\cdot 1011} = z^{1+2(2\cdot 505+1)} = z^1\cdot z^2\cdot (z^4)^{505} = (1-i)(-2i)(-4)^{505}$$

$$= (-2i + (-i\cdot(-2)i))(-4)^{505} = (-2i-2)(-4)^{505} = (-2)(i+1)(-4)^{505} = (i+1)\cdot 2\cdot 4^{505}$$

(6) $z^5=1 \iff \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0$ Ol, että $z\neq 1$, $z\neq 0$

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)=1$$

$$\iff \left(\frac{z^2}{z}+\frac{1}{z}\right)^2+\frac{z^2+1}{z}=1$$

$$\iff \left(\frac{z^2+1}{z}\right)^2+\frac{z^2+1}{z}=1$$

$$\iff \frac{z^4+2z^2+1}{z^2}+\frac{z^2+1}{z}=1$$

$$\iff z^4+2z^2+1+z^3+z=z^2$$

$$\iff z^4+z^3+z^2+z+1=0 \quad \Big|\cdot(z-1)$$

$$z^5=1$$

Ratkaistaan $x^2+x-1=0$

$$\iff x^2+x+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

$$\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

$$\iff x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\iff x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Big\} a$$

5.7.

$$z+\frac{1}{z}=a \quad \Big|\cdot z$$

$$z^2+1=za$$

$$z^2-za+1=0.$$

$z^2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}z+1=0$, jolloin

$$z=\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2-4}}{2}=\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\pm\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}+1}{4}-4}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm\sqrt{\frac{-10-2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\pm i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

Vastaavasti lasketaan $z^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}z+1=0 \iff z=\frac{1-\sqrt{5}}{4}\pm i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.