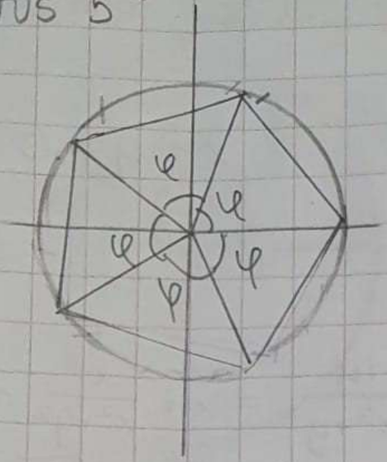
Euklidinen geometria
Harjoitus 5

1.



$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = (e^{i\varphi})^5$
$\cos(5\varphi) + i\sin(5\varphi) = e^{i(5\varphi)}$

de Moivre $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = \cos(5\varphi) + i\sin(5\varphi)$
Euler $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$
$e^{i5\varphi} = \cos(5\varphi) + i\sin(5\varphi)$

Binomilause $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5$
$= 10\cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi$
$-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi$
$-10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi$
$+5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi$

Osia vertailemalla

Pascalin kolmio $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} = \binom{n}{k}$

1
1 1
1 2 1 $\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$
1 3 3 1 $\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}$
1 4 6 4 1 $\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$
1 5 10 10 5 1

$\cos(5\varphi) = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi$ (1)
$\sin(5\varphi) = \sin^5\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos^4\varphi\sin\varphi$ (2)

Sij. $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ (1):een $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$ (2):een

$\cos(5\varphi) = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi(1-\cos^2\varphi) + 5\cos\varphi(1-\cos^2\varphi)^2$
$= \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi + 10\cos^5\varphi + 5\cos\varphi - 10\cos^3\varphi + 5\cos^5\varphi$
$= 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi$

$\sin(5\varphi) = \sin^5\varphi - 10(1-\sin^2\varphi)\sin^3\varphi + 5(1-\sin^2\varphi)^2\sin\varphi$
$= \sin^5\varphi - 10\sin^3\varphi + 10\sin^5\varphi + 5\sin\varphi(1 - 2\sin^2\varphi + \sin^4\varphi)$
$= 11\sin^5\varphi - 10\sin^3\varphi + 5\sin\varphi - 10\sin^3\varphi + 5\sin^5\varphi$
$= 16\sin^5\varphi - 20\sin^3\varphi + 5\sin\varphi$

2. $z + z^{-1}$ missä xy-tason pisteissä reaalinen?

$z = x + iy$

$$z + \frac{1}{z} = x + iy + \frac{1}{x+iy} \qquad x+iy \neq 0$$

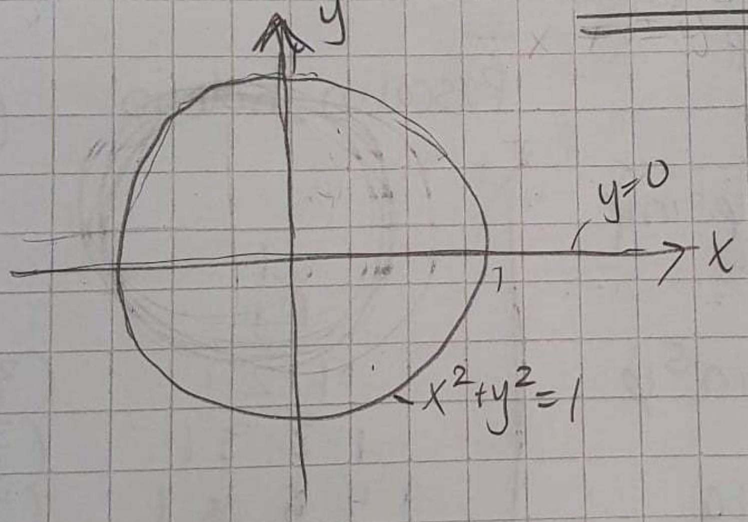
$$\frac{1}{x+iy} = \frac{(x-iy)(x+iy)}{x^2-(iy)^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2} = x+iy+\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{iy}{x^2+y^2} = \underbrace{x+\frac{x}{x^2+y^2}}_{Re(z+\frac{1}{z})}\underbrace{+iy-\frac{iy}{x^2+y^2}}_{Im(z+\frac{1}{z})}$$

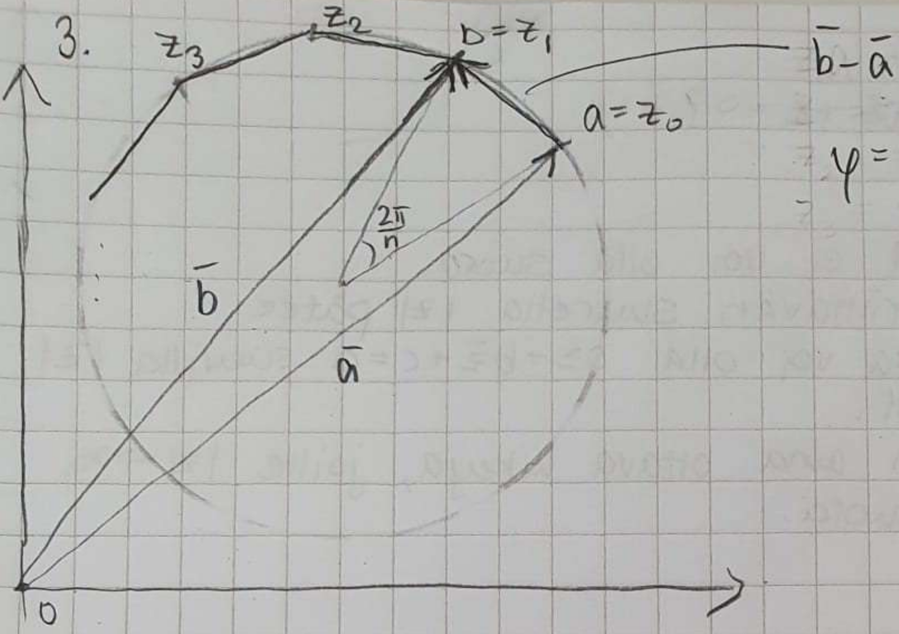
$$Im(z+\tfrac{1}{z}) = iy - \frac{iy}{x^2+y^2} = 0 \iff iy\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$$

$\underline{\underline{y=0}}$ tai $1-\frac{1}{x^2+y^2} = 0 \iff 1 = \frac{1}{x^2+y^2}$

$$\iff \underline{\underline{x^2+y^2=1}}$$



3.



$$\varphi = \frac{2\pi}{n}$$

$$z_0 = a$$
$$z_1 = a + (b-a) = b$$
$$z_2 = z_1 + (b-a)e^{i\frac{2\pi}{n}} = a + (b-a)\left(1 + e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)$$
$$z_3 = z_2 + (b-a)e^{i2\cdot\frac{2\pi}{n}} = a + (b-a)\left(1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{i2\cdot\frac{2\pi}{n}}\right)$$
$$\vdots$$
$$z_k = a + (b-a)\underbrace{\left(1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{i2\frac{2\pi}{n}} + \dots + e^{i(k-1)\frac{2\pi}{n}}\right)}_{\text{geometrisen sarjan summa}}$$

$$\sum_{s=0}^{k-1} q^s = \frac{q^k - 1}{q-1}$$

$$\sum_{s=1}^{k-1}\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^s = -1 + \sum_{s=0}^{k-1}\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^s$$
$$= -1 + \frac{e^{i\frac{2\pi}{n}k} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1}$$

$$\Delta = a + (b-a)\left(\frac{e^{i\frac{2\pi}{n}k} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1} - 1\right)$$

Teht: h)

Jos $|a| \neq |b|$, niin l ei voi olla suora.
Kun $|a| > |b|$, niin riittävän suurella $|z|$ pätee $|az| > |b\bar{z}| + |c|$, eikä voi olla $az + b\bar{z} + c = 0$ suurilla $|z|$:

$$az + b\bar{z} + c = 0$$
$$\Rightarrow az = -b\bar{z} - c$$
$$\Rightarrow |az| = |b\bar{z} + c| \leq |b\bar{z}| + |c|$$
$$|az| \leq |b\bar{z}| + |c|$$

Jos $|a| > |b|$
$\Rightarrow |az| > |bz| + |c|$ suurilla $|z|$

vastaavasti, jos $|b| > |a|$.
Suoralla on kuitenkin oltava lukuja, joille $|z| \to \infty$, joten l ei voi olla suora

Jos $|a| = |b| \neq 0$, niin on olemassa $w \in \mathbb{C}$, jolle $a = we^{i\theta}$ ja $b = \bar{w}e^{i\theta}$:

Merk. $a = re^{i\varphi}$, $b = re^{i\vartheta}$. Jos $w = re^{i\frac{\varphi - \vartheta}{2}}$, niin

$$we^{i\frac{\varphi+\vartheta}{2}} = re^{i\frac{\varphi-\vartheta}{2}} e^{i\frac{\varphi+\vartheta}{2}} = re^{i\varphi} = a$$
ja
$$\bar{w}e^{i\frac{\varphi+\vartheta}{2}} = re^{-i\frac{\varphi-\vartheta}{2}} e^{i\frac{\varphi+\vartheta}{2}} = re^{i\vartheta} = b$$

Nyt $az + b\bar{z} + c = 0$

$$\Leftrightarrow we^{i\frac{\varphi+\vartheta}{2}} z + \bar{w}e^{i\frac{\varphi+\vartheta}{2}} \bar{z} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (wz) + (\bar{w}\bar{z}) = ce^{i\frac{-\varphi-\vartheta}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(wz) = ce^{i\frac{-\varphi-\vartheta}{2}}$$

Näin ollen luvun c pitää olla sellainen, että $\mathrm{Im}(ce^{i\frac{-\varphi-\vartheta}{2}}) = 0$, koska muuten tulee tyhjä joukko.

Mikäli $\mathrm{Im}(ce^{i\frac{-\varphi-\vartheta}{2}}) = 0$, niin ehto määrää suoran. Ehdon toteuttavat pisteet wz muodostavat vertikaalisen suoran ja pisteet $z = \frac{1}{w}$ ~~...~~ luvusta w riippuen jonkin suoran.

Siis: kun $|a| = |b| \neq 0$, kyseessä on suora tietyillä c:n arvoilla, muutoin tyhjä joukko

Kun $|a| \neq |b|$, joukko ei ole suora

Kun l ei ole suora, se voi olla tyhjä joukko (esim. $a = b = 0$, $c \neq 0$), koko taso (esim. $a = b = c = 0$) tai yksittäinen piste (esim. $b = 0$)

Tehtävä 5,

Määrää kompleksitason suoran

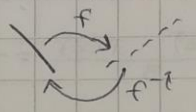
$$l = \{ z \in \mathbb{C} \mid (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 1 = 0 \}$$

kuva $f[l]$, kun $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = -iz + 3$

Nyt siis $f(z) = -iz + 3 \Leftrightarrow iz = 3 - f(z) \Leftrightarrow z = \frac{3 - f(z)}{i} = i(f(z) - 3)$

$$\overline{f(z)} = \overline{-iz + 3} = 3 + i\bar{z} \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{-3 + \overline{f(z)}}{i} = i(3 - \overline{f(z)})$$

Yksi tapa on tarkastella käänteiskuvauksen alkujoukkoa



Sijoitetaan $f(z)$ ja $\overline{f(z)}$ suoran l määräävään yhtälöön:

$$(1+i)z + (1-i)\bar{z} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+i)i(f(z) - 3) + (1-i)i(3 - \overline{f(z)} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (i-1)(f(z) - 3) + (i+1)(3 - \overline{f(z)}) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow if(z) - 3i - f(z) + 3 + 3i - i\overline{f(z)} + 3 - \overline{f(z)} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (i-1)f(z) + (-i-1)\overline{f(z)} + 7 = 0 \quad \| \cdot (-i)$$

$$\Leftrightarrow (i+1)(f(z) + (i-1)\overline{f(z)} - 7i = 0$$

Siis $f[l] = \{ z \in \mathbb{C} \mid (i+1)z + (i-1) - 7i = 0$

Teht. 6) Kuvauksesta $T: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $T(z) = 1/\bar{z}$, kutsutaan inversioksi (yksikköympyrän suhteen). Mikä on suoran

$$l = \{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = 3\}$$ kuva $T[l]$ inversiossa T?

Koska $T(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, niin $\bar{z} = \frac{1}{T(z)}$

ja $\overline{T(z)} = \overline{\frac{1}{\bar{z}}} = \frac{1}{z}$, niin $\bar{z} = \frac{1}{\overline{T(z)}}$

jotan $z + \bar{z} = 3 \iff \frac{1}{T(z)} + \frac{1}{\overline{T(z)}} = 3$

$$\iff \frac{\overline{T(z)} + T(z)}{T(z)\overline{T(z)}} = 3$$

$$\iff \frac{\overline{T(z)} + T(z)}{3} = T(z)\overline{T(z)}$$

$$\iff \frac{1}{9} = \frac{1}{9} - \frac{1}{3}T(z) - \frac{1}{3}\overline{T(z)} + T(z)\overline{T(z)}$$

$$\iff \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(T(z) - \frac{1}{3}\right)\left(\overline{T(z)} - \frac{1}{3}\right)$$

$$\iff \left(T(z) - \frac{1}{3}\right)\left(\overline{T(z) - \frac{1}{3}}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\iff \left|T(z) - \frac{1}{3}\right| = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

jolloin $T[l] = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{1}{3}| = (\frac{1}{3})^2\}$

ja suoran $z + \bar{z} = 3$ kuva on ympyrä $|z - \frac{1}{3}| = (\frac{1}{3})^2$

$z + \bar{z} = 3$

$\iff 2\mathrm{Re}(z) = 3$

$\mathrm{Re}(z) = \frac{3}{2}$