Euklidinen geometria
Harjoitus 6

1. Olk. $t \in \mathbb{C}$ ja $\varphi \in \mathbb{R}$. Näytä, että
a) $s_t \circ k_\varphi = k_\varphi \circ s_{te^{-i\varphi}}$
b) $s_t \circ p = p \circ s_{\bar{t}}$ ja
c) $k_\varphi \circ p = p \circ k_{-\varphi}$

$k_\varphi(z) = ze^{i\varphi}$
$s_t(z) = z + t$
$p(z) = \bar{z} = x - iy$

a)
$$\begin{aligned} s_t \circ k_\varphi &= s_t(k_\varphi(z)) \\ &= s_t(ze^{i\varphi}) \\ &= ze^{i\varphi} + t \\ &= ze^{i\varphi} + te^{i\varphi}e^{-i\varphi} \\ &= e^{i\varphi}(z + te^{-i\varphi}) \\ &= k_\varphi(z + te^{-i\varphi}) \\ &= k_\varphi \circ s_{te^{-i\varphi}} \quad \square \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} s_t \circ p &= s_t(p(z)) \\ &= s_t(\bar{z}) \\ &= \bar{z} + t \\ &= \bar{z} + \bar{\bar{t}} \\ &= \overline{z + \bar{t}} \\ &= p(z + \bar{t}) \\ &= p(s_{\bar{t}}(z)) \\ &= p \circ s_{\bar{t}} \quad \square \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} k_\varphi \circ p &= k_\varphi(p(z)) \\ &= k_\varphi(\bar{z}) \\ &= \bar{z}e^{i\varphi} \\ &= \bar{z}\,\overline{e^{i(-\varphi)}} \\ &= \overline{ze^{i(-\varphi)}} \\ &= p(ze^{i(-\varphi)}) \\ &= p(k_{-\varphi}(z)) \\ &= p \circ k_{-\varphi} \quad \square \end{aligned}$$

2. Yhtenevyyskuvaus $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$f(a) = a$, $f(b) = b$ (kiintopisteet), mutta $f \neq id_{\mathbb{C}}$
Määritä f:n lauseke.

Koska yht. kuvauksella f on kaksi eri kiintopistettä, mutta se ei ole identtinen kuvaus, sen kiintopisteiden joukko on suora

$$l = \{ z \in \mathbb{C} \mid f(z) = z \}$$

ja kuvaus f on peilaus tämän suoran suhteen.

Siis $f(z) = (s_t \circ k_\varphi \circ p)(z) = (s_t \circ k_\varphi)(\bar{z}) = s_t(\bar{z}e^{i\varphi}) = t + \bar{z}e^{i\varphi}$
ja vaaditaan

$$\begin{cases} f(a) = a \\ f(b) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + \bar{a}e^{i\varphi} = a \quad (1) \\ t + \bar{b}e^{i\varphi} = b \quad (2) \end{cases} \Rightarrow t = a - \bar{a}e^{i\varphi}$$

$\Rightarrow$

$$(2) \quad a - \bar{a}e^{i\varphi} + \bar{b}e^{i\varphi} = b$$

$$\Rightarrow \quad e^{i\varphi} = \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}$$

$$\Rightarrow \quad t = a - \bar{a}\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}$$

Siis

$$f(z) = a - \bar{a}\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} + \bar{z}\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} = a + \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}(\bar{z}-\bar{a})$$

Tarkistus:

$$f(b) = a - \bar{a}\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} + \bar{b}\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} = a + (\bar{b}-\bar{a})\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} = b$$

$$f(a) = a - \bar{a}\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} + \bar{a}\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} = a$$

Tarkistetaan vielä, että tämä varmasti on yht. kuv.

$$|f(z) - f(w)| = \left|a + \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}(\bar{z}-\bar{a}) - a - \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}(\bar{w}-\bar{a})\right|$$

$$= \left|\frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}\right| \left|\bar{z}-\bar{a}-\bar{w}-\bar{a}\right| = |e^{i\varphi}|\,|\bar{z}-\bar{w}|$$

$$= |\bar{z}-\bar{w}|$$

$$= |z-w|$$

Yht. kuv. $|z_1 - z_2| = |f(z_1) - f(z_2)|$

$\Rightarrow f(z) = (S_t \circ k_\varphi \circ p)(z)$

$S_t(z) = z + t$

$k_\varphi(z) = z e^{i\varphi}$

$p(z) = \bar{z}$

Tehtävä 3

$f(z) = z + 1$, $g(z) = iz$

Kuvaus f on yht. kuv. , sillä $f = S$

Kuvaus g —〃— sillä se on 90 asteen kierto

Olk. $v, w \in \mathbb{C}$

Tällöin $|g(v) - g(w)| = |iv - iw| = |i(v-w)| = |i||v-$

$= 1 \cdot |v - w| = |v - w|$

$f \circ g$

$= f(g(z)) = f(iz) = iz + 1$

$g \circ f$

$= g(f(z)) = g(z+1) = i(z+1) = iz + i \neq iz + 1 = f \circ g$

$\Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$

T4 Onko olemassa joukko $K \subseteq \mathbb{C}$, jolle
$Symm(K) = \{r_\varphi \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$

Oletus: $r_\varphi = k_\varphi$
Oletetaan että $\{k_\varphi \mid \varphi \in \mathbb{R}\} = Symm(K)$

Olkoon $(x,y) \in K$.
Merkitään $(x,y) = s(\cos\psi, \sin\psi)$, jollakin $s, \psi \in \mathbb{R}$.

Tällöin myös

$$k_{-2\psi}(x,y) = k_{-2\psi}(s\cos\psi, s\sin\psi)$$
$$= (s\cos(-\psi), s\sin(-\psi))$$
$$= (s\cos(-\psi), -s\sin(\psi)) = (x,-y) \in K,$$
sillä $k_{-2\psi} \in Sym(K)$

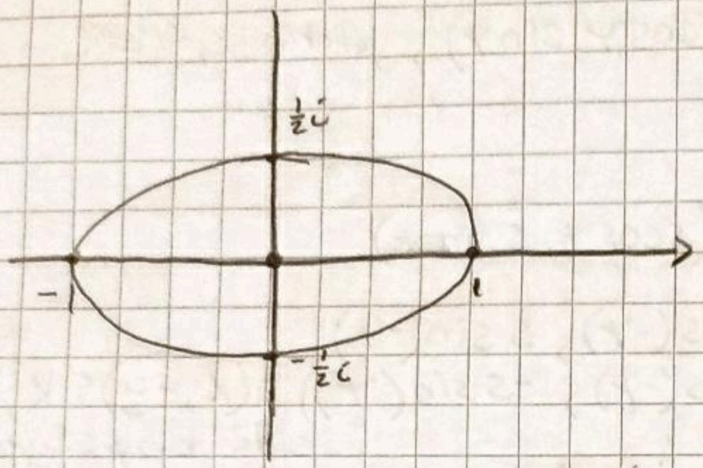
Näin ollen kaikilla $(x,y) \in K$ myös
$(x,-y) = p((x,y)) \in K$, joten
$p \in Symm(K)$.
Tämä on ristiriita, sillä
$p \neq k_\varphi$, kaikilla $\varphi \in \mathbb{R}$.

Täten tällaista joukkoa K ei siis ole.

T5 Mikä on ellipsin

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 1\}$$

symmetriaryhmä.



$$x^2 + 4y^2 = 1 \iff \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

- Origo paikallaan
  $\Rightarrow S_t \notin Symm(E)$

- Peilaus, p, kuuluu:
  $(x,y) \in E \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 1$
  $\Rightarrow x^2 + 4(-y)^2 = 1$
  $\Rightarrow (x,-y) \in E$
  $\Rightarrow p \in E$.

$$\underline{Symm(E) = \{id, k_{\pi+n}, p, k_{\pi+n} \circ p \mid n \in \mathbb{Z}\}}$$

- Kierroista vain k_π ja sen monikerrat:
  $(x,y) \in E$
  $\Rightarrow k_\pi(x,y) = (-x,-y)$

  Jos $x^2 + 4y^2 = 1$ niin
  $(-x)^2 + 4(-y)^2 = 1$
  eli $k_\pi(x,y) \in E$.

- Ainoat etäisyydellä 1 origosta olevat pisteet ovat $(1,0)$ ja $(-1,0)$ eli
  $k_\varphi(1,0) \in E$, jos $\varphi \neq \pi + n\pi$

6.6

Esimerkki tasokuviosta $K \subseteq \mathbb{C}$, jolle $Symm(K) = (Symm(K), \circ)$ on kolmen alkion syklinen ryhmä.

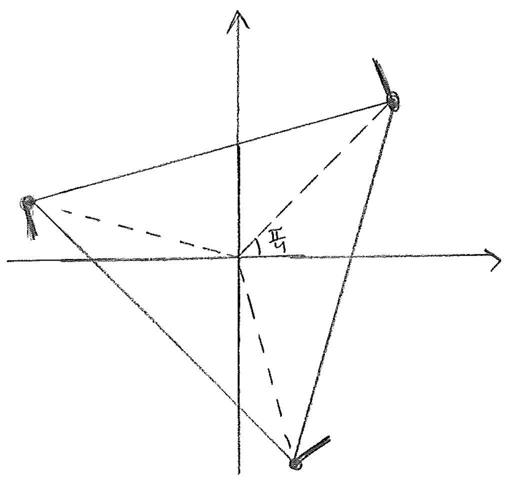
Olkoon K tasasivuinen kolmio, jonka kärkipisteet ovat

$A = (\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4})$

$B = (\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}), \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}))$

$C = (\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}), \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}))$

ja lisätään siihen pienet "väkäset" samassa kulmassa kärjistä:



Nämä väkäset estävät minkään peilauksen kuulumisen symmetrioihin.

Mikään siirto ei kuulu sym.ryhmään.

Vain kierrot k_0, $k_{\frac{2\pi}{3}}$ ja $k_{\frac{4\pi}{3}}$ kuuluvat.

Sen symmetriaryhmä on $Symm(K) = (\{id, k_{\frac{2\pi}{3}}, k_{\frac{4\pi}{3}}\}, \circ)$.

Tämä on syklinen ryhmä, sillä $k_{\frac{4\pi}{3}} = (k_{\frac{2\pi}{3}})^2$ ja $id = (k_{\frac{2\pi}{3}})^3$.