Euklidinen geometria
Harjoitus 7

1. Olk. $K, K' \subseteq \mathbb{C}$. Osoita, että
   a) $\mathrm{symm}(K) = \mathrm{symm}(\mathbb{C} \setminus K)$
   b) $\mathrm{symm}(K) \cap \mathrm{symm}(K') \subseteq \mathrm{symm}(K \cap K')$ ja
   c) $\mathrm{symm}(K) \cap \mathrm{symm}(K') \subseteq \mathrm{symm}(K \cup K')$

$(\mathrm{Sym}(K), \circ)$ symmetriaryhmä
$f[K] = \{f(x) \mid x \in K\} = K$
Olk. $K, K' \subseteq \mathbb{C}$

a) Väite: $\mathrm{symm}(K) = \mathrm{symm}(\mathbb{C} \setminus K)$

Tod. Olk $f \in \mathrm{symm}(K)$
Tällöin myös $f^{-1} \in \mathrm{symm}(K)$
Nyt $f[K] = K$ ja $f^{-1}[K] = K$,
Olk. $x \in \mathbb{C} \setminus K$
Tällöin $f(x) \in \mathbb{C} \setminus K$, koska $f^{-1}[K] = K$,
joten $f[\mathbb{C} \setminus K] \in \mathbb{C} \setminus K$.
Vastaavasti
$f^{-1}(x) \in \mathbb{C} \setminus K$, koska $f^{-1}[K] = K$,
joten $f^{-1}[\mathbb{C} \setminus K] \subseteq \mathbb{C} \setminus K$.
$\Rightarrow f[\mathbb{C} \setminus K] = \mathbb{C} \setminus K$
Näin ollen $f \in \mathrm{symm}(\mathbb{C} \setminus K)$. $\square$

b) Väite: $\mathrm{symm}(K) \cap \mathrm{symm}(K') \subseteq \mathrm{symm}(K \cap K')$

Tod. Olet. että $f \in \mathrm{symm}(K) \cap \mathrm{symm}(K')$
Nyt kaikilla $x \in K \cap K'$ pätee
$f(x) \in K$, sillä $f \in \mathrm{symm}(K)$ ja
$f(x) \in K'$, sillä $f \in \mathrm{symm}(K')$
Siis $f(x) \in K \cap K'$ eli $f[K \cap K'] \subseteq K \cap K'$
Koska myös f^{-1} on nyt symmetria, saadaan
vastaavasti
$f^{-1}(x) \in K \cap K'$ $\forall x \in K \cap K'$, joten
myös $f^{-1}[K \cap K^{-1}] \subseteq K \cap K'$ ja
$f \in \mathrm{symm}(K \cap K^{-1})$. $\square$

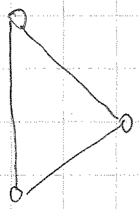
Euklidinen geometria
Harjoitus 7

1. c) <u>Väite</u>: $\mathrm{symm}(K) \cap \mathrm{symm}(K') \subseteq \mathrm{symm}(K \cup K')$

<u>Tod.</u> Olk. $f \in \mathrm{symm}(K) \cap \mathrm{symm}(K')$
Nyt $\forall x \in K$ pätee $f(x) \in K$ ja $\forall y \in K'$ pätee $f(y) \in K'$,
joten $f[K \cup K'] \subseteq K \cup K'$
Vastaavasti myös $f^{-1}[K \cup K'] \subseteq K \cup K'$, sillä f^{-1} on
myös symmetria
Näin ollen $f[K \cup K'] = K \cup K'$
ja siis $f \in \mathrm{symm}(K \cup K')$ $\square$

2. Olk. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
Tark. säännöllistä n-kulmiota
Kärkipisteet $\left(\cos \frac{2\pi}{n} k, \sin \frac{2\pi}{n} k\right)$ $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

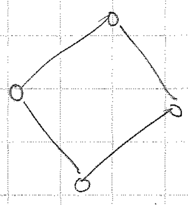
$n = 3$



Symmetriaryhmä
$\{id, k_{\frac{2\pi}{3}}, k_{\frac{4\pi}{3}}, p, p \circ k_{\frac{2\pi}{3}}, p \circ k_{\frac{4\pi}{3}}\}$

$\Rightarrow |symm(kolmio)| = 6 = 2n$

$n = 4$



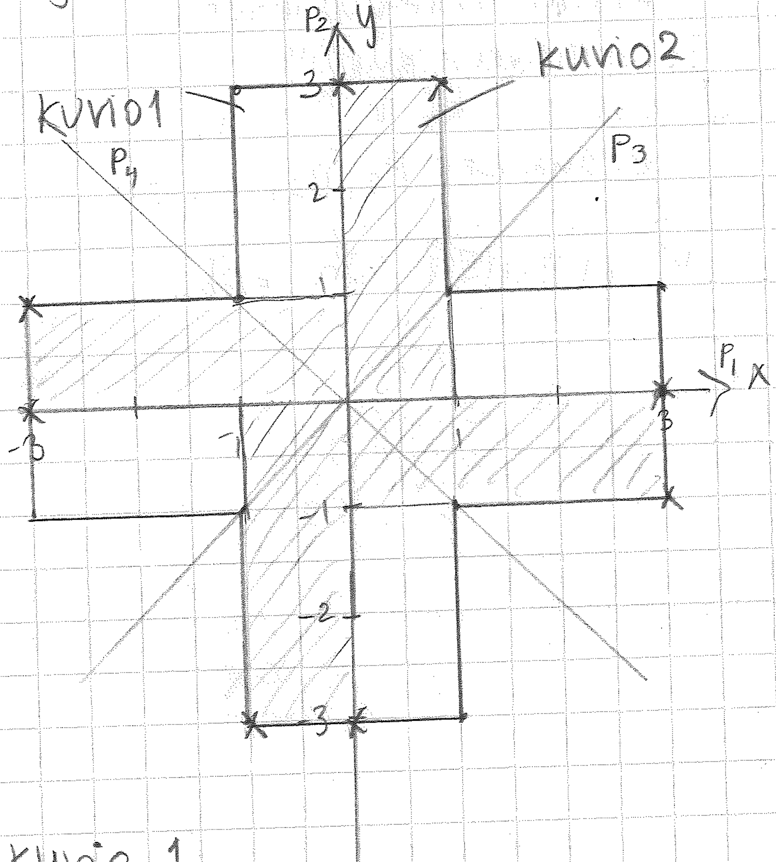
symmetriaryhmä (merk. $r = k_{\frac{\pi}{2}}$)
$\{id, r, r^2, r^3, p, p \circ r, p \circ r^2, p \circ r^3\}$

$\Rightarrow |Symm(neliö)| = 8 = 2n$

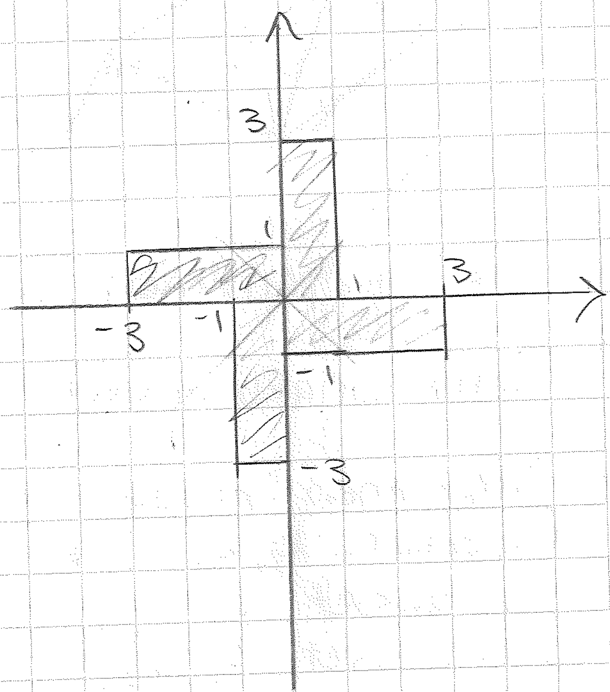
n: Symmetriaryhmä on diedriryhmä D_n, joka muodostuu kierrosta $k_{\frac{2\pi}{n}}$ ja peilauksesta p. Koska $(k_{\frac{2\pi}{n}})^n = id$ ja $p^2 = id$, saadaan $2n$ alkiota ryhmään.

$$Symm(K) = \{id, \underbrace{r, r^2, \ldots, r^{n-1}}_{\text{kierrot}}, \underbrace{p, r \circ p, \ldots, r^{n-1} \circ p}_{\text{peilaukset eri alkioiden suhteen}}\}$$

3. Määritä ao. 12-kulmioiden symmetriaryhmät. Edellisen kärjet ovat pisteissä $(\pm 1, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm 3)$ ja $(\pm 3, \pm 1)$, jälkimmäisen pisteissä $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 3, 0)$, $(0, \pm 3)$, $(1,3)$, $(-3,1)$, $(-1,-3)$ ja $(3,-1)$. Onko jompikumpi kuvioista symmetrisempi kuin toinen siinä mielessä, että sen symmetriaryhmä sisältää toisen symmetriaryhmän?



kuvio2 $\subseteq$ kuvio1



<u>kuvio 1</u>

identtinen kuvaus

$\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi(n+1)}{2}$, $\frac{\pi(n+2)}{2}$, $\left(\frac{\pi(n+3)}{2} = id\right)$

Kierrot:

peilaus: x-akseli, y-akseli, 45°, 135° suorat

0°, 45°, 90°, 135°

$K_1 = \{ id, \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi(n+1)}{2}, \frac{\pi(n+2)}{2}, P_{0°}, P_{45°}, P_{90°}, P_{135°} \}$

(vastaa neliön symmetriaryhmää)

<u>kuvio 2</u>

identtinen kuvaus

kierrot $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi(n+1)}{2}$, $\frac{\pi(n+2)}{2}$

~~peilaukset $P_{45°}$, $P_{135°}$~~ Ei peilauksia.

$K_2 \{ id, \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi(n+1)}{2}, \frac{\pi(n+2)}{2} \} \subseteq K_1$

(4) $x_{n+1} = \begin{cases} f(x_n), \text{ kun } n \text{ parillinen} \\ g(x_n), \text{ kun } n \text{ pariton} \end{cases}$

$x_0 = x_0$

$x_1 = f(x_0) = 2a - x_0$

$x_2 = g(x_1) = 2b - (2a - x_0) = -2a + 2b + x_0$

$x_3 = f(x_2) = 2a - (-2a + 2b + x_0) = 4a - 2b - x_0$

$x_4 = g(x_3) = 2b - (4a - 2b - x_0) = -4a + 4b + x_0$

$x_5 = f(x_4) = 6a - 4b - x_0$

$x_6 = g(x_5) = -6a + 6b + x_0$

Siis

$$x_{n+1} = \begin{cases} (n+2)a - nb - x_0, & n \text{ parillinen} \\ -(n+1)a + (n+1)b + x_0, & n \text{ pariton} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n(a-b) + 2a - x_0, & n \text{ parillinen} \\ (n+1)(b-a) + x_0, & n \text{ pariton} \end{cases}$$

Nyt jos $a < b$, niin (symmetrisesti, kun $b < a$)

$$\lim_{n \to \infty} n(a-b) + 2a - x_0 = -\infty$$

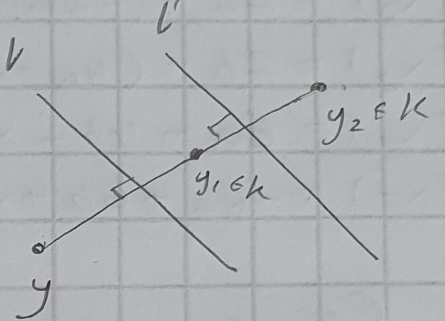
mutta $$\lim_{n\to\infty} (n+1)(b-a) + x_0 = \infty$$

Siis jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hajaantuu. $\square$

Harjoitus 7

(5) Todistus:
Vastaoletus: l ja l' eivät leikkaa.

Olk. $y \in K$.



Merk. $l' = l + c$, $c \in \mathbb{C}$
Olk. $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jono,
missä $y_0 = y$ ja

$$y_{n+1} = \begin{cases} p_l(y_n), & n \text{ parillinen} \\ p_{l'}(y_n), & n \text{ pariton} \end{cases}$$

Harjoitus 6.1

Huomataan, että $p_{l'} = S_c \circ p_l \circ S_c = S_{2c} \circ p_l$.

Olk. $x_n = \begin{cases} d(y_n, l), & \text{kun } y_n \text{ on samalla puolella suoraa } l \\ -d(y_n, l), & \text{muulloin} \end{cases}$

Nyt jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on kuin tehtävässä 7.4, kun
$x_0 = d(y_0, l)$, $a = 0$ ja $b = |c|$.
Kuten tehtävässä 7.4, parillinen osajono hajaantuu kohti (miinus) ääretöntä, mutta $y_n \in K$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ja K on rajoitettu ↯

Siis suorat l ja l' leikkaavat. □

⑥ Olk. l tason suora.

- peilaus $p_l \in Symm(l)$, kun peilataan minkä tahansa (suoran l) normaalin suhteen.

  Tämä on sama kuin kierto k_π minkä tahansa (suoran l) pisteen suhteen.

- siirto $s_{\lambda a} \in Symm(l)$, kun a on l:n suuntavektori, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

- liukupeilaukset yllä olevia peilausta ja siirtoja yhdistään $s_{\lambda a} \circ p_l \in Symm(l)$.