Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö

Kevät 2017

Geometria

Luennot: **Kerkko Luosto**
Muistiinpanot: **Jesse Railo (2013) ja Jussi Klemetti (2017)**

6 Kartioleikkaukset

Vanhan ajan geometrian merkittävimpiä tuloksia oli havainto, että erilaisilla toisen asteen käyrillä on yhdistävä geometrinen ominaisuus: ne saadaan kaikki kartioleikkauksina. Tässä luvussa tasotarkastelutkin tehdään tavanomaisessa karteesisessa tasossa kompleksitason asemasta, koska kartioita tietenkin joudutaan käsittelemään kolmiulotteisessa avaruudessa.

6.1 Ellipsi, paraabeli ja hyperbeli

Kartioleikkauksia ovat ympyrä, ellipsi, paraabeli ja hyperbeli, jotka pystytään muodostamaan suoran ympyräkartion ja tason leikkauksina $\mathbb{R}^3$:ssa. Kartioleikkauksien tarkastelu tehdään seuraavassa aliluvussa, kun tässä on ensin määritelty tarvittavat käyrätyypit.

Määritelmä 6.1. *Ellipsillä* tarkoitetaan niiden tason pisteiden uraa (eli joukkoa), joille etäisyyksien summa kiinteistä pisteistä $\mathbf{p}$ ja $\mathbf{q}$ on näiden pisteiden keskinäistä etäisyyttä suurempi vakio, ts. joukko E on ellipsi, jos on olemassa sellaiset $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ ja vakio $c > |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$, että

$$E = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |\mathbf{x} - \mathbf{p}| + |\mathbf{x} - \mathbf{q}| = c \right\}.$$

Pisteitä $\mathbf{p}$ ja $\mathbf{q}$ kutsutaan ellipsin E *polttopisteiksi.*

Mahdollinen erikoistapaus on $\mathbf{p} = \mathbf{q}$. Tällöin $E = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 2|\mathbf{x} - \mathbf{p}| = c \} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x} - \mathbf{p}| = c/2 \}$, ts. E on ympyrä. Ympyrät ovat siis ellipsejä, mutta ellipsit eivät eivät tietenkään yleisesti ole ympyröitä. Sen sijaan määritelmä kieltää mahdollisuuden $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ ja $c = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$, jolloin joukon E voidaan osoittaa surkastuvan janaksi.

Lause 6.2. *Olkoon $E \subseteq \mathbb{R}^2$ ellipsi, jonka polttopisteet sijaitsevat x-akselilla symmetrisesti origon suhteen. Tällöin joillakin $a, b > 0$ pätee*

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Todistus. Oletuksen mukaan ellipsin E polttopisteet ovat $\mathbf{p} = (-t, 0)$ ja $\mathbf{q} = (t, 0)$ jollakin $t \geq 0$. Merkitään c:llä vakiota, joka on kuten määritelmässä, ts. $c > |\mathbf{p} - \mathbf{q}| = |(-2t, 0)| = 2t$ ja

$$E = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |\mathbf{v} - \mathbf{p}| + |\mathbf{v} - \mathbf{q}| = c \right\}.$$

Huomataan, että $(c/2, 0) \in E$, sillä

$$\begin{aligned}\left|\left(\frac{c}{2}, 0\right) - (t, 0)\right| + \left|\left(\frac{c}{2}, 0\right) - (-t, 0)\right| &= \left|\frac{c}{2} - t\right| + \left|\frac{c}{2} + t\right| \\ &= \left(\frac{c}{2} - t\right) + \left(\frac{c}{2} + t\right) = c.\end{aligned}$$

Merkitään $a = c/2$. Havaitaan, että E sisältyy $2a$-sivuiseen neliöön:

$$E \subseteq Q := \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a, |y| \leq a \,\},$$

sillä kaikilla $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ pätee

$$|\mathbf{v} - \mathbf{p}| + |(\mathbf{v} - \mathbf{q}| = |(x - t, y)| + |(x, y) - (-t, 0)| = |(x - t, y)| + |(x + t, y)| \geq 2\max\{|x|, |y|\}.$$

Kun $(x, y) \in Q$, niin

$$\begin{aligned}(x, y) \in E &\Leftrightarrow |(x, y) - (t, 0)| + |(x, y) - (-t, 0)| = 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - t)^2 + y^2} + \sqrt{(x + t)^2 + y^2} = 2a \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - t)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + t)^2 + y^2} \\ &\Rightarrow (x - t)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + t)^2 + y^2} + (x + t)^2 + y^2 \qquad (*) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2xt + t^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + t)^2 + y^2} + x^2 + 2xt + t^2 \\ &\Leftrightarrow 4a\sqrt{(x + t)^2 + y^2} = \underbrace{4a^2 + 4xt}_{\geq 0} \quad (|x \cdot t| \leq a \cdot a = a^2) \\ &\Leftrightarrow a^2((x + t)^2 + y^2) = a^4 + 2a^2xt + x^2t^2 \\ &\Leftrightarrow a^2x^2 + 2a^2xt + a^2t^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2xt + x^2t^2 \\ &\Leftrightarrow (a^2 - t^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2t^2 = a^2(a^2 - t^2) \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - t^2} = 1.\end{aligned}$$

Merkitään $b = \sqrt{a^2 - t^2}$. Koska $a = c/2 > t$, niin $0 < b \leq a$. Edellinen johto merkitsee, että

$$E \subseteq \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \right\} \subseteq S := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \leq a, |y| \leq b \right\}.$$

Erityisesti E siis sisältyy suorakaiteeseen $S \subseteq Q$.

Huomattakoon myös, että edellisessä johdossa oli vain yksi kohta $(*)$, jossa päättelyssä oli implikaatio ekvivalenssin sijasta. Implikaatio johtui siitä, että yhtälön molemmat puolet korotettiin neliöön, jolloin yhtäpitävyys pätee vain, jos yhtälön puolet ovat samanmerkkiset. Osoitetaan nyt, että samanmerkkisyys todellakin pätee suorakaiteessa S. Kun $(x, y) \in S$, niin

$$\begin{aligned}|(x, y) - (-t, 0)| &= \sqrt{(x + t)^2 + y^2} \\ &\leq \sqrt{(a + t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 2at + t^2 + a^2 - t^2} = \sqrt{2a^2 - 2at} \\ &\leq \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a\end{aligned}$$

joten $2a - \sqrt{(x+t)^2 + y^2} \geq 0$, mikä osoittaa, että implikaatio kohdassa $(*)$ voidaan korvata ekvivalenssilla. Siis

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

□

Huomautus. Janoja origosta pisteisiin $(a, 0)$ ja $(0, b)$ kutsutaan ellipsin *puoliakseleiksi*. Puoliakselit voitaisiin tietenkin määritellä myös ellipseille, joiden polttopisteet eivät sijaitse symmetrisesti x-akselilla.

Ei ole vaikeata osoittaa, että mielivaltaisella ellipsillä on symmetriakeskipiste, joka on polttopisteiden yhdysjanan keskipiste. Ellipsien symmetriaryhmät ovat isomorfisia, jos ellipsit eivät ole ympyröitä.

Määritelmä 6.3. Tasokuvio on *paraabeli*, jos se on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä kaukana kiinteästä pisteestä $\mathbf{p}$ ja kiinteästä suorasta ℓ, missä oletetaan, että $\mathbf{p} \notin \ell$. Pistettä $\mathbf{p}$ kutsutaan *polttopisteeksi*) ja suoraa ℓ *johtosuoraksi*.

Lause 6.4. *Jos paraabelin P johtosuora on x-akselin suuntainen, niin jollakin a, b, c, $a \neq 0$, pätee*

$$P = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bx + c = y \}.$$

Todistus. Olkoon P:n johtosuora

$$\ell = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = t \},$$

missä $t \in \mathbb{R}$ on vakio, ja P:n polttopiste $\mathbf{p} = (p_0, p_1) \in \mathbb{R}^2$, missä $p_1 \neq t$. Määritelmästä saadaan

$$\begin{aligned}
(x, y) \in P &\Leftrightarrow |y - t| = \sqrt{(x - p_0)^2 + (y - p_1)^2} \\
&\Leftrightarrow y^2 - 2yt + t^2 = (x - p_0)^2 + (y - p_1)^2 \\
&\Leftrightarrow y^2 - 2yt + t^2 = x^2 - 2xp_0 + p_0^2 + y^2 - 2yp_1 + p_1^2 \\
&\Leftrightarrow 2y\underbrace{(p_1 - t)}_{\neq 0} = 2yp_1 - 2yt = x^2 - 2xp_0 + p_0^2 + p_1^2 - t^2 \\
&\Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 2xp_0 + p_0^2 + p_1^2 - t^2}{2(p_1 - t)} = ax^2 + bx + c,
\end{aligned}$$

missä $a = \dfrac{1}{2(p_1 - t)}$, $b = \dfrac{-p_0}{p_1 - t}$ ja $c = \dfrac{p_0^2 + p_1^2 - t^2}{2(p_1 - t)}$. □

Määritelmä 6.5. Olkoon $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ kaksi tason $\mathbb{R}^2$ pistettä ja $0 < d < |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$. *Polttopisteiden* $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ sekä *erotusparametrin d* määräämä *hyperbeli* on

$$H := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \big| |\mathbf{x} - \mathbf{a}| - |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \big| = d \right\}.$$

6.2 Kartio leikkaa tasoa

Määritelmä 6.6. *Suora kaksivaippainen ympyräkartio* on $\mathbb{R}^3$:n osajoukko K, jonka määräävät *huippu* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, huipun kautta kulkeva suora l ja suhde $k > 1$. Kartio K koostuu niistä pisteistä, joilla etäisyyksien suhde huipusta $\mathbf{p}$ ja suorasta l on vakio k.

Lause 6.7. *Suoran kaksiosaisen ympyräkartion K yhtälö on 2. asteen polynomiyhtälö muuttujien x_0, x_1 ja x_2 suhteen, kun $(x_0, x_1, x_2) \in K$.*

Todistus. Olkoon K suora kaksivaippainen ympyräkartio, jonka huippu $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^3$, määräävä suora on l ja suhde on $k > 0$. Olkoon $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2)$ suoran l suuntavektori, jolle $|\mathbf{s}| = 1$, ts.

$$l = \{\, \mathbf{p} + \lambda \mathbf{s} \mid \lambda \in \mathbb{R} \,\},$$

sillä määritelmän mukaan $\mathbf{p} \in l$. Merkitään $k = 1/\sin\alpha$, missä $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Huomataan, että K koostuu niistä pisteistä $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$, joille suoran l ja janan $[\mathbf{p}, \mathbf{x}]$ välinen kulma on α, ja lisäksi pisteestä $\mathbf{p} \in K$. Siis

$$K = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |(\mathbf{p} - \mathbf{x}) \cdot s| = |\mathbf{p} - \mathbf{x}|\,|s| \cos\alpha \,\}.$$

Kun $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$, niin

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \in K &\Leftrightarrow (\mathbf{p} - \mathbf{x}) \cdot s = |\mathbf{p} - \mathbf{x}|\,\underbrace{|s|}_{=1} \cos\alpha \\
&\Leftrightarrow \left| \sum_{i=0}^{2} (p_i - x_i) s_i \right| = \cos\alpha \cdot \sqrt{\sum_{i=0}^{2} (p_i - x_i)^2} \quad \text{(Molemmat puolet epänegatiivisia)} \\
&\Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{2} s_i (x_i - p_i) \right)^2 = \cos^2\alpha \sum_{i=0}^{2} (x_i - p_i)^2 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{2} s_i^2 (x_i - p_i)^2 + \sum_{i,j \in \{0,1,2\},\, i \neq j} 2 s_i s_j (x_i - p_i)(x_j - p_j) = \cos^2\alpha \sum_{i=0}^{2} (x_i - p_i)^2 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{2} (s_i^2 - \cos^2\alpha)(x_i - p_i)^2 + \sum_{i,j \in \{0,1,2\},\, i \neq j} 2 s_i s_j (x_i - p_i)(x_j - p_j) = 0.
\end{aligned}$$

Tämä yhtälö tunnistetaan muodoltaan polynomiyhtälöksi. Lisäksi se on toista astetta, sillä jos $s_i^2 - \cos^2\alpha = 0$ jokaisella $i \in \{0, 1, 2\}$, niin $s_0^2 = s_1^2 = s_2^2 = 1/3$, sillä $s_0^2 + s_1^2 + s_2^2 = 1$, mistä seuraa $s_0 s_1 = 1/3 \neq 0$. □

Lause 6.8. *Kun suoraa kaksivaippaista ympyräkartiota leikataan xy-tasolla, niin saadaan* kartioleikkaus, *jonka yhtälö on toisen asteen muotoa muuttujien x_0 ja x_1 suhteen, ts. jos L on tämä kartioleikkaus, niin*

$$L = \{\, (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x_0, x_1) = 0 \,\},$$

missä f on toisen asteen polynomi.

Todistus. Olkoon K kyseinen kartio, jota leikataan xy-tasolla $\{ (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0 \}$. Käytetään kartiolle edellisessä todistuksessa johdettua yhtälöä ja sijoitetaan sinne $x_2 = 0$. Tällöin saadaan

$$L = K \cap \{ (x_0, x_1, 0) \mid (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \} = \{ (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x_0, x_1) = 0 \},$$

missä

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1) = (s_0^2 - \cos^2 \alpha)(x_0 - p_0)^2 + (s_1^2 - \cos^2 \alpha)(x_1 - p_1)^2 + (s_2^2 - \cos^2 \alpha)(0 - p_2)^2 \\ + 2s_0 s_1 (x_0 - p_0)(x_1 - p_1) + 2s_0 s_2 (x_0 - p_0)(0 - p_2) + 2s_1 s_2 (x_1 - p_1)(0 - p_2), \end{aligned}$$

joka on korkeintaan toista astetta oleva polynomifunktio muuttujien x_0 ja x_1 suhteen. Jälleen huomataan, että polynomi f on toista astetta, sillä kaikki toisen asteen kertoimet eivät voi hävitä: Jos nimittäin olisi $s_0^2 - \cos^2 \alpha = s_1^2 - \cos^2 \alpha = s_0 s_1 = 0$, niin seuraisi $s_0 = s_1 = \cos \alpha = 0$, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $\alpha \in]0, \pi/2[$. □

6.3 Toisen asteen käyrän analysointi

Määritelmä 6.9. Polynomikuvaus $p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on *k:nnen asteen muoto* ($k, n \in \mathbb{Z}_+$), jos kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ pätee $p(t\mathbf{x}) = t^k p(\mathbf{x})$. Toisen asteen muotoa kutsutaan *neliömuodoksi*.

Lemma 6.10. *Polynomikuvaus $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on neliömuoto, jos ja vain jos joillakin kertoimilla $a, b, c \in \mathbb{R}$ pätee, että*

$$p(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2,$$

kun $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$.

Todistus. Oletetaan ensin, että joillakin vakioilla $a, b, c \in \mathbb{R}$ pätee, että

$$p(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2,$$

kun $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$. Tällöin kaikilla $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ ja $t \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$\begin{aligned} p(t(x_0, x_1)) = p(tx_0, tx_1) = a(tx_0)^2 + b(tx_0)(tx_1) + c(tx_1)^2 \\ = t^2 ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 = t^2 p(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Siis tällainen p on neliömuoto.

Olkoon sitten polynomikuvaus $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mielivaltainen neliömuoto. Oletetaan, että $\deg(p) \leq 2$, ts. kun $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$, niin

$$p(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + dx_0 + ex_1 + f,$$

missä $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Koska p on neliömuoto, niin erityisesti

$$f = p(0, 0) = p(0 \cdot (0, 0)) = 0^2 p(0, 0) = 0.$$

Edelleen

$$a - d = p(-1,0) = p((-1)(1,0)) = (-1)^2 p(1,0) = p(1,0) = a + d$$

joten $d = 0$. Vastaavasti

$$p(0,-1) = p(0,1) \Rightarrow c - e = c + e \Rightarrow e = 0.$$

Siis p on haluttua muotoa.

Todistetaan lopuksi, miksi tapaus $\deg(p) > 2$ on mahdoton. Kirjoitetaan

$$p(x_0, x_1) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{i,j} x_0^i x_1^j,$$

missä vain äärellisen moni vakioista a_{ij} eroaa nollasta. Oletetaan vastoin väitettä, että joillakin $i, j \in \mathbb{N}$ $a_{ij} \neq 0$ ja $i + j > 2$. Merkitään

$$n \coloneqq \max\{\, i + j \mid i, j \in \mathbb{N}, a_{ij} \neq 0 \,\} > 2.$$

Valitaan $\mathbf{y} = (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, jolle

$$\tau = \sum_{i,j \in \mathbb{N},\, i+j=n} a_{i,j} y_0^i y_1^j \neq 0.$$

Merkitään

$$\delta = \sum_{i,j \in \mathbb{N},\, i+j<n} \left| a_{i,j} y_0^i y_1^j \right|.$$

Tällöin kaikilla $t \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$\begin{aligned}
|p(t\mathbf{y}) - t^n \tau| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{i,j \in \mathbb{N},\, i+j=k} a_{i,j} (t y_0)^i (t y_1)^j - t^n \tau \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n} t^k \sum_{i,j \in \mathbb{N},\, i+j=k} a_{i,j} y_0^i y_1^j - t^n \sum_{i,j \in \mathbb{N},\, i+j=n} a_{ij} y_0^i y_1^j \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} t^k \sum_{i,j \in \mathbb{N},\, i+j=k} a_{ij} y_0^i y_1^j \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \delta t^k.
\end{aligned}$$

Kun $t \geq 1$, tästä seuraa $|p(t\mathbf{y}) - t^n \tau| \leq n \delta t^{n-1}$. Erityisesti kun $t \geq \max\{1, 2n\delta / |\tau|\}$, niin

$$|p(t\mathbf{y})| \geq t^n |\tau| - n\delta t^{n-1} \geq t^n |\tau| - t^n |\tau| / 2 = t^n |\tau| / 2$$

ja

$$|p(t\mathbf{y})| \leq t^n |\tau| + n\delta t^{n-1} \leq 3 t^n |\tau| / 2.$$

Mutta tästähän seuraa
$$\frac{|p(4t\mathbf{y})|}{|p(t\mathbf{y})|} \geq \frac{(4t)^n\,|\tau|/2}{3t^n\,|\tau|/2} = 4^n/3,$$
vaikka toisaalta neliömuodolle p saadaan
$$\frac{|p(4t\mathbf{y})|}{|p(t\mathbf{y})|} = 4^2 \leq 4^3/4 < 4^n/3.$$
Tämä on ristiriita, joka osoittaa mahdottomaksi, että p:ssä olisi toista astetta korkeampia termejä. □

Määritelmä 6.11. Neliömuoto $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on *indefiniitti*, jos se saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Jos p ei ole indefiniitti ja $p(\mathbf{x}) \neq 0$, kun $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, niin p on *definiitti*. Jos p ei ole indefiniitti eikä definiitti, niin se on *semidefiniitti*.

Lause 6.12. *Neliömuoto $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2$, on*

1) indefiniitti, jos $b^2 - 4ac > 0$,

2) semidefiniitti, jos $b^2 - 4ac = 0$ ja

3) definiitti, jos $b^2 - 4ac < 0$.

Todistus. Käsitellään ensin erikoistapaus $a = c = 0$, jolloin $p(x_0, x_1) = bx_0x_1$, kun $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$. Lisäksi saadaan, että $b^2 - 4ac = b^2 \geq 0$. Jos $b = 0$, niin $b^2 - 4ac = 0$ ja p on nollakuvaus, joten se on semidefiniitti. Jos taas $b \neq 0$ eli $b^2 - 4ac = b^2 > 0$, niin p saa selvästi sekä positiivisia että negatiivisia arvoja eli p on indefiniitti.

Oletetaan sitten, että $a \neq 0$ tai $c \neq 0$. Tilanteen symmetrisyyden vuoksi voidaan olettaa, että $a \neq 0$. Tällöin saadaan
$$\begin{aligned}
p(x_0, x_1) &= ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 \\
&= a(x_0^2 + \frac{b}{a}x_0x_1) + cx_1^2 \\
&= a\left(x_0^2 + 2\frac{b}{2a}x_0x_1 + \frac{b^2}{4a^2}x_1^2\right) + cx_1^2 - \frac{ab^2}{4a^2}x_1^2 \\
&= a\left(x_0 + \frac{b}{2a}x_1\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}x_1^2 \quad (*),
\end{aligned}$$
kun $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$. Jaetaan nyt käsittely kolmeen tapaukseen.

Oletetaan, että $b^2 - 4ac < 0$, jolloin $4ac - b^2 > 0$. Lausekkeessa $(*)$ summattavat ovat samanmerkkisiä tai ainakin toinen on nolla. Voidaan olettaa, että $a > 0$, jolloin
$$p(x_0, x_1) = \underbrace{a\left(x_0 + \frac{b}{2a}x_1\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{4ac - b^2}{4a}x_1^2}_{\geq 0}.$$

Tästä muodosta havaitaan, että $p(x_0, x_1) = 0$, jos ja vain jos

$$\begin{cases} a\left(x_0 + \frac{b}{2a}x_1\right)^2 = 0 \\ \dfrac{4ac - b^2}{4a}x_1^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + \frac{b}{2a}x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Siis tässä tapauksessa p on definiitti.

Oletetaan sitten, että $b^2 - 4ac = 0$, jolloin

$$p(x_0, x_1) = a\left(x_0 + \frac{b}{2a}x_1\right)^2,$$

kun $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$. Selvästi p ei voi saada sekä positiivisia että negatiivisia arvoja. Toisaalta

$$p(x_0, x_1) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}x_1.$$

Siis p on semidefiniitti.

Oletetaan lopuksi, että $b^2 - 4ac > 0$. Edelleen kaava $(*)$ on voimassa. Voidaan olettaa, että $a > 0$. Tällöin kaikilla $x_0 \neq 0$ pätee $p(x_0, 0) = ax_0^2 > 0$ ja jos $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2, x_1 \neq 0$, toteuttaa yhtälön $x_0 + \frac{b}{2a}x_1 = 0$, niin

$$p(x_0, x_1) = \frac{4ac - b^2}{4a}x_1^2 < 0.$$

Siis p on idefiniitti. □

Määritelmä 6.13. Olkoot $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$. Tasokuviot A ja B ovat *yhtenevät*, $A \cong B$, jos on olemassa yhtenevyyskuvaus $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle $B = f[A]$.

Lause 6.14. *Olkoon $C := g^{-1}\{0\}$ toisen asteen käyrä, missä*

$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + dx_0 + ex_1 + f.$$

Merkitään p:llä vastaavaa neliömuotoa

$$p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ p(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2.$$

Jos p on definiitti tai indefiniitti, niin $C \cong p^{-1}\{\gamma\}$ jollakin vakiolla $\gamma \in \mathbb{R}$.

Todistus. Osoitetaan, että itse asiassa on olemassa sellainen siirto $s_{-t}, t = (t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2$, että $s_{-t}: C \cong p^{-1}\{\gamma\}$. Olkoon $t = (t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2$. Kun $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$, niin

$$\begin{aligned}
(g \circ s_{-t}^{-1})(x_0, x_1) &= (g \circ s_t)(x_0, x_1) = g(x_0 + t_0, x_1 + t_1) \\
&= a(x_0 + t_0)^2 + b(x_0 + t_0)(x_1 + t_1) + c(x_1 + t_1)^2 \\
&\qquad + d(x_0 + t_0) + e(x_1 + t_1) + f \\
&= ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2 + (2at_0 + bt_1 + d)x_0 \\
&\qquad + (bt_0 + 2ct_1 + e)x_1 + at_0^2 + bt_0t_1 + ct_1^2 + dt_0 + et_1 + f \\
&= p(x_0, x_1) + (2at_0 + bt_1 + d)x_0 + (bt_0 + 2ct_1 + e)x_1 + p(t_0, t_1).
\end{aligned}$$

Siirto s_{-t} halutaan valita siten, että $2at_0 + bt_1 + d = 0$ ja $bt_0 + 2ct_1 + e = 0$ eli

$$\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \\ -e \end{pmatrix}.$$

Tällä yhtälöllä on ratkaisu, koska

$$\det \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix} = 4ac - b^2 \neq 0,$$

sillä p on definiitti tai indefiniitti. Jos $t = (t_0, t_1)$ on tämä ratkaisu, niin kaikilla $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$ pätee

$$(g \circ s_{-t}^{-1})(x_0, x_1) = p(x_0, x_1) + \gamma,$$

missä $\gamma = p(t_0, t_1)$. Siis

$$p^{-1}\{\gamma\} = s_{-t}[C] \cong C.$$

□

Lemma 6.15. *Neliömuodon* $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, p(x_0, x_1) = ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2$ *lausekkeella on esitys*

$$p(x_0, x_1) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Todistus. Todellakin

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax_0 + \frac{bx_1}{2} \\ \frac{bx_0}{2} + cx_1 \end{pmatrix} \\ &= ax_0^2 + \frac{bx_0x_1}{2} + \frac{bx_0x_1}{2} + cx_1^2 \\ &= ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2. \end{aligned}$$

□

Seuraavaksi esitämme joitain aputuloksia lineaarialgebrasta.

Fakta: Symmetrisellä $n \times n$-matriisilla on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

Karakteristinen polynomi matriisille

$$\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

on

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b/2 \\ b/2 & c - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(c - \lambda) - \frac{b^2}{4} = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - \frac{b^2}{4}.$$

Tämän polynomin diskriminantti on

$$D = (-(a + c))^2 - 4(ac - \frac{b^2}{4}) = (a - c)^2 + b^2 \geq 0.$$

Huomataan, että

$$D = 0 \Leftrightarrow a = c, b = 0.$$

Tällöin

$$\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI,$$

missä I on identiteettimatriisi, ja matriisilla on ominaisvektorit (1,0) ja (0,1).

Fakta: Symmetrisen $n \times n$-reaalimatriisin ominaisarvot ovat reaalisia.

Fakta: Symmetrisen $n \times n$-matriisin eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ovat keskenään kohtisuorassa.

Todistus. Olkoon A symmetrinen $n \times n$-matriisi, ts. $A^T = A$. Olkoon x ja ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori ja vastaavasti y ominaisarvoa μ vastaava ominaisvektori. Tällöin

$$x^T Ay = x^T(\mu y) = \mu(x^T y)$$

ja

$$x^t Ay = (y^T Ax)^T = (y^T(\lambda x))^T = \lambda(x^T y).$$

Siis

$$(\mu - \lambda)x^T y = 0 \Rightarrow x^T y = 0 \Rightarrow x \text{ ja } y \text{ ovat kohtisuorassa.}$$

□

Merkitään *kiertomatriisia*

$$R_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Luennoilla esitettiin seuraavien tulosten todistusten hahmotelmat.

Lause 6.16. *Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ toisen asteen polynomifunktio, jota vastaava neliömuoto on definiitti. Tällöin jokaisella $\gamma \in \mathbb{R}$ tasa-arvokäyrä $f^{-1}\{\gamma\}$ on joko ellipsi tai piste tahi tyhjä joukko.*

Lause 6.17. *Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ toisen asteen polynomifunktiot, jota vastaava neliömuoto on indefiniitti. Tällöin jokaisella $\gamma \in \mathbb{R}$ tasa-arvokäyrä $f^{-1}\{\gamma\}$ on joko hyperbeli tai toisiaan leikkaava suorapari.*

Lause 6.18. *Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ toisen asteen polynomifunktiot, jota vastaava neliömuoto on semidefiniitti. Tällöin jokaisella $\gamma \in \mathbb{R}$ tasa-arvokäyrä $f^{-1}\{\gamma\}$ on joko paraabeli tai suora tai yhdensuuntaisista suorista koostuva suorapari tahi tyhjä joukko.*