Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö

Geometria

Kevät 2017

Luennot: **Kerkko Luosto**
Muistiinpanot: **Jesse Railo (2013) ja Jussi Klemetti (2017)**

4 Kompleksitaso

Euklidista tasoa voi tutkia monilla eri tavoilla: käyttämällä perinteisiä geometrian menetelmiä, tasovektoreita tai kompleksilukuja. Viimeksimainittu tapa on erittäin sujuva analyyttisen geometrian menetelmä, kun siihen vain tottuu. Tässä luvussa pyritään ensiksi perustelemaan, miksi kompleksialgebralla pystyy tekemään aivan vastaavat laskelmat, kuin mitä pystyy tekemään tasovektoreina. Tämä seuraa siitä, että kompleksiluvuilla pystytään tulkitsemaan sisätuloavaruus $\mathbb{R}^2$. Seuraavaksi tarkastellaan tason yhtenevyyskuvauksia, jolloin huomataan, että kaikille näille kuvauksille saadaan lausekkeet kompleksialgebran avulla. Lopuksi käsitellään symmetrian käsitettä.

4.1 Kompleksitaso sisätuloavaruutena

Kompleksilukujen perusteet oletetaan tässä tutuiksi, joten nämä käydään vain kursorisesti läpi. Geometrian kannalta keskeistä on Gaussin havainto, että kompleksiluvut voidaan konstruoida reaalilukupareina, jolloin kompleksiluvut ovat täsmälleen tason pisteet. Siispä taso voidaan mieltää *kompleksitasoksi*, kun tarkastelut perustuvat kompleksialgebraan. Kompleksitasossa työskentely tarkoittaa itse asiassa sitä, että tarkastelut tehdään kompleksilukujen kunnassa $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, jota on vahvistettu liittolukukuvauksella, ts. rakenteessa $(\mathbb{C}, +, \cdot, \bar{\cdot})$. Tavoitteena on osoittaa, että tässä nimenomaisessa rakenteessa pystytään tulkitsemaan tason $\mathbb{R}^2$ vektorit, skalaarit ja asianmukaiset laskutoimitukset.

Määritelmä 4.1. *Kompleksiluku* z on reaalilukujen pari $z = (x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Lukua x kutsutaan kompleksiluvun z *reaaliosaksi* ja merkitään $x = \operatorname{Re} z$. Lukua y kutsutaan vastaavasti *imaginaariosaksi*, $y = \operatorname{Im} z$. Kahden kompleksiluvun $z = (x, y)$ ja $w = (u, v)$ *summa* on

$$z + w = (x + u, y + v)$$

ja *tulo* on

$$z \cdot w = (xu - yv, xv + uy).$$

Kompleksilukujen joukkoa merkitään

$$\mathbb{C} = \{\, (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \,\}.$$

Vektoreiden tulkinta: Edellisen määritelmän mukaan kompleksiluvut ovat reaalilukupareja eli tasovektoreita. Lisäksi kompleksilukujen summa ja tasovektoreiden summa ovat samoja laskutoimituksia, joten vektorisumma on yksi tarkasteltavan rakenteen laskutoimituksista.

Skalaareiden tulkinta: Tunnetuksi reaaliluvut samastetaan niiden kompleksilukujen kanssa, joiden toinen koordinaatti on nolla eli luku $x \in \mathbb{R}$ samastetaan kompleksiluvun $(x,0) \in \mathbb{C}$ kanssa. Tässä mielessä siis $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ja skalaarit ovat tarkasteltavassa rakenteessa $(\mathbb{C}, +, \cdot, \bar{\cdot})$.

On luonnollista kysyä, miten rakenteessa tunnistetaan, mitkä luvut ovat skalaareita eli reaalisia. Palautetaan mieleen ensiksi muutamia kompleksialgebra merkintöjä ja määritelmiä. *Imaginaariyksikköä* $(0,1)$ merkitään symbolilla i. Huomaa, että $\mathrm{i}^2 = -1$. Kun reaaliluvut samastetaan sovitulla tavalla x-akselin kompleksilukujen kanssa, niin pätee $(x,y) = x + y\mathrm{i}$, kun $x, y \in \mathbb{R}$.

Määritelmä 4.2. Kompleksiluvun $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, *itseisarvo* on $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Luvun z *liittoluku* on $\overline{z} = x - yi$.

Lause 4.3. *Kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee*

a) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, *b)* $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ *ja* *c)* $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Todistus. Olkoon $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $z\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 \cdot i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$, joten koska $|z| \geq 0$, saadaan $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

b) $\dfrac{z + \overline{z}}{2} = \dfrac{x + yi + x - yi}{2} = \dfrac{2x}{2} = x = \operatorname{Re} z$.

c) $\dfrac{z - \overline{z}}{2i} = \dfrac{x + yi - x + yi}{2i} = \dfrac{2yi}{2i} = y = \operatorname{Im} z$.

□

Huomataan, että jokaiselle kompleksiluvulle $z = x + y\mathrm{i}$, missä $x, y \in \mathbb{R}$, pätee

$$z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im} z = 0 \iff \frac{z - \overline{z}}{2i} = 0 \iff z - \overline{z} = 0 \iff z = \overline{z}.$$

Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ skalaarit eli reaaliluvut ovat siis helposti tunnistettavissa liittolukuoperaation avulla.

Tunnetusti reaalilukujen laskutoimitukset ovat kompleksilukujen laskutoimitusten rajoittumia eli skalaarisumma on $+ \restriction (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ja tulo on $\cdot \restriction (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, kun työskentelyrakenne on $(\mathbb{C}, +, \cdot, \bar{\cdot})$. Siis reaalilukujen kunta on tulkittavissa.

Skalaareiden tunnistaminen on itse asiassa luonteeltaan täysin geometrista, sillä liittolukukuvaus $z \mapsto \overline{z}$ on geometrisesti peilaus x-akselin suhteen ja z on reaalinen täsmälleen silloin, kun se säilyy tässä peilauksessa paikallaan. Koska liittolukukuvaus on peilaus, sitä merkitään jatkossa symbolilla p. Laskujen kannalta seuraava tulos on oleellinen:

Lause 4.4. *Liittolukukuvaus $p \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = \overline{z}$, on kompleksilukujen kunnan $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ automorfismi. Se on siis sekä bijektio $p \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ että homomorfismi eli säilyttää seuraavassa mielessä laskutoimitukset: Kun $z, w \in \mathbb{C}$,*

$$p(z + w) = p(z) + p(w) \ \text{ eli } \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

ja

$$p(z \cdot w) = p(z) \cdot p(w) \text{ eli } \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

Lisäksi $p \circ p = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, joten kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee $\overline{\overline{z}} = z$.

Todistus. Olkoon $z = x + yi, w = u + vi \in \mathbb{C}$, missä $x, y, u, v \in \mathbb{C}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\overline{z+w} &= \overline{(x+u) + (y+v)i} = x + u - (y+v)i \\ &= x - yi + u - vi = \overline{z} + \overline{w}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\overline{z \cdot w} &= \overline{(xu - yv) + (xv + uy)i} = xu - yv - (xv + uy)i \quad = (xu - (-y)(-v)) + (x \cdot (-v) + u \cdot (-y))i \\ &= (x - yi) \cdot (u - vi) = \overline{z} \cdot \overline{w}.\end{aligned}$$

Siis p on homomorfismi. Kaikilla $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ pätee $(p \circ p)(z) = \overline{\overline{z}} = \overline{x - y\mathrm{i}} = x - (-y)\mathrm{i} = x + y\mathrm{i} = z = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}(z)$, joten $p \circ p = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Siis p:llä on käänteiskuvaus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, se itse! Siis p on myös bijektio. □

Koska liittolukukuvaus p on kompleksilukujen kunnan automorfismi, saadaan lauseen seurauksena myös tunnetut tulokset $\overline{-z} = -\overline{z}$ ja $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$, kun $z \neq 0$.

Sisätulon tulkinta: Edeltävät tarkastelut osoittavat, että vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ vektorit ja skalaarit ovat laskutoimituksineen tulkittavissa rakenteessa $(\mathbb{C}, +, \cdot, \bar{\cdot})$. Siis koko vektoriavaruus $\mathbb{R}^2$ kaikkine rakenteineen on tulkittavissa. Sisätuloavaruus $\mathbb{R}^2$ on vektoriavaruus $\mathbb{R}^2$ tavanomaisella sisätulolla eli pistetulolla varustettuna. Sekaannuksien välttämiseksi tässä luvussa käytetään pistetulolle epätavanomaista merkintää $\odot$, ts. kun $z = (x, y), w = (u, v) \in \mathbb{C}$, niin

$$z \odot w = xu + yv.$$

Sisätulonkin saa laskettua kompleksilukujen laskutoimitusten ja liittolukuoperaation avulla. Huomataan nimittäin, että

$$\begin{aligned}z\overline{w} &= (x + y\mathrm{i})(u - v\mathrm{i}) = xu - y(-v) + (yu + x(-v))\mathrm{i} \\ &= xu + yv + (yu - xv)\mathrm{i} = z \odot w + (yu - xv)\mathrm{i},\end{aligned}$$

joten

$$z \odot w = \mathrm{Re}(z\overline{w}) = \frac{z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}}{2} = \frac{z\overline{w} + \overline{z}w}{2}.$$

Siis sisätuloavaruus $\mathbb{R}^2$ on tulkittavissa rakenteessa $(\mathbb{C}, +, \cdot, \bar{\cdot})$.

Tavanomaista sisätuloa $\odot$ vastaa tietenkin tavanomainen normi, joka osoittautuu kompleksiluvun itseisarvoksi

$$\sqrt{z \odot z} = \sqrt{\frac{z\overline{z} + \overline{z}z}{2}} = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i})} = \sqrt{x^2 - y^2\mathrm{i}^2} == \sqrt{x^2 + y^2} = |z|\,,$$

kun $z = x + y\mathrm{i}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Itseisarvoa vastaa edelleen euklidinen metriikka tasossa: Pisteiden $z, w \in \mathbb{C}$ etäisyys on $|z - w|$.

4.2 Suorat ja kulmat

Koska kompleksitasossa voidaan tulkita kaksiulotteinen euklidinen sisätuloavaruus, päästään käsiksi kaikkiin sisätuloavaruuden käsitteisiin. Esimerkkinä näistä käsitellään suoria ja kulmia.

Olkoon $\ell \subseteq \mathbb{C}$ kompleksitason suora eli $\mathbb{C}$:n yksiulotteinen affiini aliavaruus. Valitaan suoralta pisten $a \in \ell$ ja valitaan lisäksi sen suunta $w \neq 0$ eli ℓ:n suunta-avaruuden virittäjä. Tällöin

$$\ell = \{\, a + \lambda w \mid \lambda \in \mathbb{R} \,\}.$$

Johdetaan suoralle ℓ käyttökelpoinen yhtälö. Kun $z \in \mathbb{C}$, niin

$$\begin{aligned}
z \in \ell &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}\big(z = a + \lambda w\big) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}\Big(\frac{z-a}{w} = \lambda\Big) \\
&\iff \frac{z-a}{w} \in \mathbb{R} \iff \frac{z-a}{w} = \overline{\frac{z-a}{w}} \\
&\iff \frac{z-a}{w} = \frac{\overline{z} - \overline{a}}{\overline{w}} \\
&\iff (z-a)\overline{w} = (\overline{z} - \overline{a})w \\
&\iff z\overline{w} - \overline{z}w + \overline{a}w - a\overline{w} = 0.
\end{aligned}$$

Siis suoralle ℓ saadaan

$$\ell = \{\, z \in \mathbb{C} \mid z\overline{w} - \overline{z}w + \overline{a}w - a\overline{w} = 0 \,\}.$$

Tämä saadaan myös muokattua muotoon, jossa ensimmäisen vähennyslaskun tilalla on yhteenlasku. Merkitään nimittäin $\zeta = -iw$ ja $c = -\mathrm{i}(\overline{a}w - a\overline{w})$. Tällöin

$$\begin{aligned}
z \in \ell &\iff z\overline{w} - \overline{z}w + \overline{a}w - a\overline{w} = 0 \\
&\iff z(-\mathrm{i})\overline{w} + \overline{z}\mathrm{i}w - \mathrm{i}(\overline{a}w - a\overline{w}) = 0 \\
&\iff z\overline{\mathrm{i}w} + \overline{z}\mathrm{i}w + c = 0 \\
&\iff z\overline{\zeta} + \overline{z}\zeta + c = 0.
\end{aligned}$$

Laskuharjoituksissa selvitetään, mitä kertoimilta $a, b, c \in \mathbb{C}$ pitää vaatia, jotta joukko

$$\{\, z \in \mathbb{C} \mid az + b\overline{z} + c = 0 \,\}$$

olisi suora.

Koska kompleksitasoon liittyy sisätuloavaruus, niin sen kulmille on määritelty suuruus: Olkoon $a \in \mathbb{C}$ tarkasteltavan kulman kärki ja $b, c \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ sen kylkien pisteitä. Tällöin määritelmän mukaan

$$\measuredangle(b, a, c) = \arccos \frac{(b-a) \odot (c-a)}{|b-a|\,|c-a|}.$$

Jos kulman kärki on origossa eli $a = 0$, saadaan

$$\measuredangle(b, 0, c) = \arccos \frac{b \odot c}{|b|\,|c|}.$$

Tutkitaan tämän suhdetta kompleksiluvun napaesitykseen.

Määritelmä 4.5. Kompleksiluvun z *argumentti* on se yksikäsitteinen $\varphi \in [0, 2\pi[$, jolle $z = |z|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, kun $z \neq 0$. Tapauksessa $z = 0$ sovitaan, että argumentti on 0. Luvun z argumenttia merkitään $\arg z$.

Jokaiselle $z \in \mathbb{C}$ saadaan siis yksikäsitteinen *napaesitys*

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

missä $r = |z| = |z - 0|$ on pisteen z etäisyys origosta ja $\varphi = \arg w$. Käyttämällä Eulerin kaavaa

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

napaesitys saadaan vielä yksinkertaisempaan muotoon $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Huomattakoon, että

$$\overline{z} = \overline{r}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = r(\overline{\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi}) = r(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi)) = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}.$$

Etsitään kulman kyljillä oleville pisteille napaesitykset: $b = B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$ ja $c = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$, missä siis $B \geq 0$, $C \geq 0$ ja $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Saadaan

$$\begin{aligned}
b \odot c &= \frac{b\overline{c} + \overline{b}c}{2} = \frac{B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\overline{C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}} + \overline{B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}}{2} = \frac{B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}}{2} \\
&= \frac{BC}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta - \mathrm{i}\gamma} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma - \mathrm{i}\beta}) = \frac{BC}{2}(\cos(\beta - \gamma) + \mathrm{i}\sin(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \beta) + \mathrm{i}\sin(\gamma - \beta)) \\
&= \frac{BC}{2}(\cos(\beta - \gamma) + \mathrm{i}\sin(\beta - \gamma) + \cos(\beta - \gamma) - \mathrm{i}\sin(\beta - \gamma)) \\
&= \frac{BC}{2} \cdot 2\cos(\beta - \gamma) = BC\cos(\beta - \gamma).
\end{aligned}$$

Siis

$$\frac{b \odot c}{|b|\,|c|} = \frac{BC\cos(\beta - \gamma)}{BC} = \cos\beta - \gamma,$$

joten

$$\measuredangle(b, 0, c) = \arccos \frac{b \odot c}{|b|\,|c|} = \arccos(\cos(\beta - \gamma)) = \beta - \gamma,$$

jos $\gamma \leq \beta \leq \gamma + \pi$.

4.3 Isometrioista yhtenevyyskuvauksiin

Tavoitteena on tutkia tason yhtenevyyskuvauksia, mutta on mielekästä tehdä ensin pohjatyötä yleisemmin metrissä avaruuksissa ja erityisesti sitätuloavaruuksissa.

Määritelmä 4.6. Olkoot E ja F normiavaruuksia sekä $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ vastaavat normit. Olkoon edelleen $f\colon E \to F$. Kuvaus f *säilyttää normin*, jos kaikilla $x \in E$ pätee

$$\|f(x)\|' = \|x\|.$$

Määritelmä 4.7. Olkoot E ja F sisätuloavaruuksia sekä $\cdot$, $\cdot'$ vastaavat sisätulot. Olkoon edelleen $f\colon E \to F$. Kuvaus f *säilyttää sisätulon*, jos kaikilla $x, y \in E$ pätee

$$f(x) \cdot' f(y) = x \cdot y$$

Lemma 4.8. *Olkoot E ja F normiavaruuksia, joissa on normit $\|\cdot\|$ ja $\|\cdot\|'$ sekä $f\colon E \to F$.*

a) Jos f on isometria ja $f(\bar{0}) = \bar{0}$, niin f säilyttää normin.

b) Jos f on normin säilyttävä lineaarikuvaus, niin f on isometria.

Todistus. Merkitään normeja vastaavia metriikoita d:llä ja d':lla.

a) Oletetaan, että f on isometria ja $f(\bar{0}) = \bar{0}$. Tällöin kaikilla $x \in E$ pätee

$$\|f(x)\|' = \|f(x) - f(\bar{0})\|' = d'(f(x), f(\bar{0})) = d(x, \bar{0}) = \|x - \bar{0}\| = \|x\|,$$

ts. f säilyttää normin.

b) Oletetaan, että f on normin säilyttävä lineaarikuvaus. Tällöin kaikilla $x, y \in E$ saadaan

$$d'(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\|' = \|f(x - y)\|' = \|x - y\| = d(x, y).$$

Siis f on isometria.

□

Lemma 4.9. *Olkoot E ja F sisätuloavaruuksia sekä $f\colon E \to F$ lineaarikuvauksia. Tällöin f säilyttää normin, jos ja vain jos f säilyttää sisätulon.*

Todistus. Merkitään normeja E:ssä ja F:ssä $\|\cdot\|$:llä ja $\|\cdot\|'$:lla sekä sisätuloja $\cdot$:lla ja $\cdot'$:lla.

Oletetaan ensin, että f säilyttää normin. Kaikilla $x, y \in E$ pätee

$$\|x + y\|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + 2(x \cdot y) + y \cdot x = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \cdot y),$$

joten

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

Vastaava tulos pätee tietenkin myös F:ssä. Siis

$$f(x) \cdot' f(y) = \frac{1}{2}(\|f(x) + f(y)\|'^2 - \|f(x)\|'^2 - \|f(y)\|'^2) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = x \cdot y,$$

joten sisätulo säilyy.

Oletetaan sitten, että sisätulo säilyy. Kaikilla $x \in E$ saadaan tällöin

$$\|f(x)\|'^2 = f(x) \cdot' f(x) = x \cdot x = \|x\|^2.$$

Koska normi on aina epänegatiivinen, tästä saadaan $\|f(x)\|' = \|x\|$. Siis normi säilyy kuvauksessa f. □

Lause 4.10. *Olkoot E ja F sisätuloavaruuksia sekä $f\colon E \to F$ sisätulon säilyttävä kuvaus. Tällöin f on lineaarikuvaus.*

Todistus. Kuvaus f on myös normin säilyttävä, sillä kaikilla $x \in E$ pätee

$$\|f(x)\|'^2 = f(x) \cdot' f(x) = x \cdot x = \|x\|^2,$$

joten $\|f(x)\|' = \|x\|$. Erikoistapauksena tästä saadaan

$$\|f(\bar{0})\|' = \|\bar{0}\| = 0,$$

joten $f(\bar{0}) = \bar{0}$.

Osoitetaan ensin, että kaikilla $x \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ pätee

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Edellisen havainnon nojalla voidaan olettaa, että $\lambda \neq 0$ ja $x \neq \bar{0}$. Tällöin

$$f(\lambda x) \cdot' f(x) = (\lambda x) \cdot x = \lambda(x \cdot x) = \lambda\|x\|^2.$$

Jos $\lambda > 0$, niin tästä seuraa

$$f(\lambda x) \cdot' f(x) = \lambda\|x\|^2 = |\lambda|\,\|x\|)\|x\| = \|\lambda x\|\ \|x\| = \|f(\lambda x)\|'\ \|f(x)\|',$$

joten Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälön tarkennuksen nojalla $f(\lambda x) \upuparrows f(x)$. Siis jollakin $\mu > 0$ pätee $f(\lambda x) = \mu f(x)$, mutta tästähän seuraa

$$\lambda\|x\|^2 = f(\lambda x) \cdot' f(x) = \mu f(x) \cdot' f(x) = \mu\|f(x)\|' = \mu\|x\|,$$

ja koska $x \neq \bar{0}$, niin $\|x\| \neq 0$, joten $\lambda = \mu$.

Jos taas $\lambda < 0$, niin

$$f(\lambda x) \cdot' f(x) = \lambda\|x\|^2 = -|\lambda|\,\|x\|)\|x\| = -\|\lambda x\|\ \|x\| = -\|f(\lambda x)\|'\ \|f(x)\|',$$

mistä Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälön tarkennuksen nojalla saadaan $f(\lambda x) \updownarrows f(x)$. Siis jollakin $\mu < 0$ pätee $f(\lambda x) = \mu f(x)$, mistä seuraa samoin $\mu = \lambda$. Siis f on skaalautuva kuvaus.

Olkoot $x, y \in E$. On osoitettava, että $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Ensimmäinen havainto on, että

$$\begin{aligned}\|f(x+y)\|'^2 &= \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x\cdot y) + \|y\|^2 \\ &= \|f(x)\|'^2 + 2(f(x)\cdot f(y)) + \|f(y)\|'^2 = \|f(x)+f(y)\|'^2,\end{aligned}$$

joten $\|f(x+y)\| = \|f(x)+f(y)\|$, sillä f säilyttää sekä sisätulon että normin. Tarkastellaan sitten erotusta $f(x+y) - (f(x)+f(y))$. Edellisen tuloksen sekä säilyvyysominaisuuksien avulla saadaan

$$\begin{aligned}\|f(x+y) - (f(x)+f(y))\|'^2 &= \|f(x+y)\|'^2 - 2f(x+y)\cdot' (f(x)+f(y)) + \|f(x)+f(y)\|'^2 \\ &= 2\|f(x+y)\|'^2 - 2f(x+y)\cdot' (f(x)+f(y)) \\ &= 2\|f(x+y)\|'^2 - 2f(x+y)\cdot' f(x) - 2f(x+y)\cdot' f(y) \\ &= 2\|x+y\|^2 - 2(x+y)\cdot x - 2(x+y)\cdot y = 2\|x+y\|^2 - 2(x+y)\cdot(x+y) = 0.\end{aligned}$$

Siis $\|f(x+y) - (f(x)+f(y))\|' = 0$, mutta tämähän on mahdollista vain, jos $f(x+y) - (f(x)+f(y)) = 0$ eli $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Siten f on lineaarikuvaus. □

Kootaan saadut tulokset:

Lause 4.11. *Olkoot E ja F sisätuloavaruuksia sekä $f\colon E \to F$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

a) f säilyttää sisätulon.

b) f on normin säilyttävä lineaarikuvaus.

c) f on isometria, jolle $f(\bar{0}) = \bar{0}$.

Todistus.

a) ⇒ b) Oletetaan, että f säilyttää sisätulon. Edellisen lauseen perusteella f on lineaarikuvaus, joten lemman 4.9 nojalla f säilyttää normin.

b) ⇒ a) Jos f on normin säilyttävä lineaarikuvaus, niin lemmasta 4.9 toiseen suuntaan käytettynä saadaan, että f säilyttää sisätulon.

b) ⇒ c) Oletetaan, että f on normin säilyttävä lineaarikuvaus. Lemman 4.8 mukaan f on isometria. Koska f on lineaarikuvaus, niin $f(\bar{0}) = \bar{0}$.

c) ⇒ b) Oletetaan, että f on isometria ja $f(\bar{0}) = \bar{0}$. Aiemman tuloksen perusteella f on tällöin affiini kuvaus. Koska f on affiini ja $f(\bar{0}) = \bar{0}$, niin f on lineaarikuvaus. Toisaalta lemman 4.8 nojalla se on myös normin säilyttävä kuvaus.

□

Seuraus 4.12. *Yhtenevyyskuvaukset säilyttävät kulmat, ts. jos $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on yhtenevyyskuvaus ja $\bar a, \bar b, \bar c \in \mathbb{R}^n$, niin*

$$\measuredangle(f(\bar a), f(\bar b), f(\bar c)) = \measuredangle(\bar a, \bar b, \bar c).$$

Todistus. Asetetaan $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g(\bar x) = f(\bar x) - f(\bar 0)$. Tällöin $g(\bar 0) = f(\bar 0) - f(\bar 0) = \bar 0$ ja g on kahden isometrian, yhtenevyyskuvauksen f ja siirron $\bar x \mapsto \bar x - \bar 0$ yhdistettynä kuvauksena isometria. Koska $\mathbb{R}^n$ on sisätuloavaruus ja g on isometria, jolle $g(\bar 0) = \bar 0$, niin edellisen lauseen nojalla g säilyttää sisätulon. Lisäksi g on lineaarikuvaus. Siten

$$\begin{aligned}
\measuredangle(f(\bar a), f(\bar b), f(\bar c)) &= \arccos\left(\frac{(f(\bar a) - f(\bar b)) \cdot (f(\bar c) - f(\bar b))}{\left|f(\bar a) - f(\bar b)\right|\left|f(\bar c) - f(\bar b)\right|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{(g(\bar a) - g(\bar b)) \cdot (g(\bar c) - g(\bar b))}{\left|g(\bar a) - g(\bar b)\right|\left|g(\bar c) - g(\bar b)\right|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{g(\bar a - \bar b) \cdot g(\bar c - \bar b)}{\left|g(\bar a - \bar b)\right|\left|g(\bar c - \bar b)\right|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{(\bar a - \bar b) \cdot (\bar c - \bar b)}{\left|\bar a - \bar b\right|\left|\bar c - \bar b\right|}\right) \\
&= \measuredangle(\bar a, \bar b, \bar c).
\end{aligned}$$

□

Lause 4.13. *Olkoon V sisätuloavaruus. Tällöin* $(\mathrm{Isom}(V), \circ)$ *on ryhmä, missä*

$$\mathrm{Isom}(V) := \{ f\colon V \to V \mid f \text{ on bijektiivinen yhtenevyyskuvaus}\}.$$

Todistus. Merkitään sisätuloa vastaavaa metriikkaa d:llä. Identtinen kuvaus id_V on tietenkin bijektio ja lisäksi isometria, sillä kaikilla $a, b \in V$ pätee $\mathrm{d}(\mathrm{id}_V(a), \mathrm{id}_V(b)) = d(a, b)$. Kahden kuvauksen $f, g \in \mathrm{Isom}(V)$ yhdistetty kuvaus $f \circ g$ on tunnetusti bijektio $V \to V$ ja myös isometria, sillä

$$d((f \circ g)(a), (f \circ g)(b)) = d(f(g(a)), f(g(b))) = d(g(a), g(b)) = d(a, b),$$

kun $a, b \in V$. Kun $f \in \mathrm{Isom}(V)$, niin $f^{-1}\colon V \to V$ on bijektio ja f huomataan isometriaksi seuraavasti. Kun $a, b \in V$, niin

$$d(f^{-1}(a), f^{-1}(b)) = d(f(f^{-1}(a)), f(f^{-1}(b))) = d(a, b).$$

Siis $(\mathrm{Isom}(V), \circ)$ on ryhmä. □

4.4 Tason yhtenevyyskuvaukset

Esimerkki 4.14. a) Olkoon $t \in \mathbb{C}$. Tällöin *siirto s_t kompleksiluvun t verran* eli kuvaus $s_t\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$s_t(z) = z + t,$$

on yhtenevyyskuvaus, sillä kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$ pätee

$$|f(z) - f(w)| = |(z + t) - (w + t)| = |z - w|.$$

b) Liittolukukuvaus $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = \overline{z}$, eli *peilaus x-akselin suhteen* on myös yhtenevyyskuvaus, sillä

$$|p(z) - p(w)| = |\overline{z} - \overline{w}| = |\overline{z - w}| = |z - w|,$$

kun $z, w \in \mathbb{C}$.

c) Olkoon $\varphi \in \mathbb{R}$. Tällöin *kierto k_φ kulman φ verran origon ympäri*, missä $k_\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$k_\varphi(z) = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

on samoin yhtenevyyskuvaus. Kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$ on nimittäin voimassa

$$\left|k_\varphi(z) - k_\varphi(w)\right| = \left|z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - w\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right| = \left|(z - w)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right| = |z - w|.$$

Osoitetaan nyt, että edellisen esimerkin yhtenevyyskuvaukset ovat erittäin edustava joukko tason yhtenevyyskuvauksia. Jokainen yhtenevyyskuvaus pystytään nimittäin muodostamaan yhdistettynä kuvauksena näistä.

Lemma 4.15. *Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ yhtenevyyskuvaus. Tällöin on olemassa sellainen $t \in \mathbb{C}$ ja yhtenevyyskuvaus $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, että $g(0) = 0$ ja $f = s_t \circ g$.*

Todistus. Merkitään $t = f(0)$. Koska yhtenevyyskuvaukset muodostavat ryhmän, niin $g = s_t^{-1} \circ f$ on yhtenevyyskuvaus. Selvästi $s_t^{-1} = s_{-t}$, joten

$$g(0) = (s_t^{-1} \circ f)(0) = s_{-t}(f(0)) = f(0) - t = 0.$$

Koska $g = s_t^{-1} \circ f$, niin $f = s_t \circ g$. □

Lemma 4.16. *Olkoon $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ yhtenevyyskuvaus, jolle $g(0) = 0$. Tällöin on olemassa sellainen $\varphi \in [0, 2\pi[$, että $g(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ ja $g = k_\varphi \circ h$, missä $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on yhtenevyyskuvaus, jolle $h(0) = 0$ ja $h(1) = 1$.*

Todistus. Yhtenevyyskuvaus g säilyttää kompleksiluvun itseisarvon, sillä $g(0) = 0$. Siis $|g(1)| = |1| = 1$ eli $g(1)$ on yksikköympyrällä. Kompleksiluvulle $g(1)$ saadaan siis napaesitys $g(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, missä $\varphi \in [0, 2\pi[$. Asetetaan $h = k_\varphi^{-1} \circ g$. Tällöin $g = k_\varphi \circ h$,

$$h(0) = (k_\varphi^{-1} \circ g)(0) = k_{-\varphi}(g(0)) = k_{-\varphi}(0) = 0 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = 0$$

ja

$$h(1) = k_{-\varphi}(g(1)) = k_{-\varphi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = 1.$$

□

Lause 4.17. *Peilaus p x-akselin suhteen, kierto k_φ kulman φ verran origon ympäri ($\varphi \in [0, 2\pi[$) ja siirto s_t vektorin $t \in \mathbb{C}$ verran ovat tason yhtenevyyskuvauksia. Jokainen tason yhtenevyyskuvaus f on yhdistetty kuvaus näistä. Tarkemmin: On olemassa kulma $\varphi \in [0, 2\pi[$ ja vektori $t \in \mathbb{C}$, jolle*

$$f = s_t \circ k_\varphi$$

tai

$$f = s_t \circ k_\varphi \circ p.$$

Todistus. Esimerkin 4.14 perusteella tiedetään jo, että p, k_φ ja s_t ovat yhtenevyyskuvauksia, kun $\varphi \in [0, 2\pi[$ ja $t \in \mathbb{C}$.

Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ yhtenevyyskuvaus. Lemman 4.15 perusteella $f = s_t \circ g$ jollakin origon kiinnittävällä yhtenevyyskuvauksella g ja siirrolla s_t, $t \in \mathbb{C}$. Edelleen lemman 4.16 nojalla kuvauksen g voi esittää muodossa $g = k_\varphi \circ h$, missä h on tason yhtenevyyskuvaus, jolle $h(0) = 0$ ja $h(1) = 1$. Yhdistämällä nämä tiedot saadaan $f = s_t \circ k_\varphi \circ h$.

Tutkitaan, mitä arvoja $h(\mathrm{i})$ voi saada. Koska h on yhtenevyyskuvaus, jolle $h(0) = 0$, niin h säilyttää itseisarvon. Siis $|h(\mathrm{i})| = |\mathrm{i}| = 1$ eli $h(\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$ jollakin $\psi \in [-\pi, \pi]$. Toisaalta yhtenevyyskuvauksesta h tiedetään, että se säilyttää kulmat. Koska 1 ja i muodostavat origoon nähden suoran kulman, niin $\psi = \pi/2$ tai $\psi = -\pi/2$, joten $h(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ tai $h(\mathrm{i}) = -1$. Toisaalta yhtenevyyskuvaukset ovat affiineja kuvauksia, ja koska lisäksi $h(0) = 0$, niin h on lineaarikuvaus. Koska $\{1, \mathrm{i}\}$ on $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden $\mathbb{C}$ kanta, niin arvot $h(1)$ ja $h(\mathrm{i})$ kiinnittävät lineaarikuvauksen h yksikäsitteisesti. Jos $h(1) = 1$ ja $h(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$, niin selvästi $h = \mathrm{id}_\mathbb{C}$ ja $f = s_t \circ k_\varphi$. Jos taas $h(1) = 1$ ja $h(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$, niin yksikäsitteinen nämä ehdot toteuttava lineaarikuvaus on liittolukukuvaus p. (p on todellakin $\mathbb{R}$-linearinen, sillä kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ pätee $p(z + w) = \overline{z + w}$ ja $p(\lambda z) = \overline{\lambda z} = \overline{\lambda}\overline{z} = \lambda\overline{z} = \lambda p(z)$.) Siis tässä tapauksessa $f = s_t \circ k_\varphi \circ p$. □

Siirron, kierron origon suhteen ja liittolukukuvauksen keskinäinen järjestys edellisessä tuloksessa on itse asiassa epäoleellinen asia. Jatkon laskuissa järjestystä täytyy aina silloin tällöin vaihtaa, joten seuraava lemma on hyödyllinen.

Lemma 4.18. *Olkoot $t \in \mathbb{C}$ ja $\varphi \in \mathbb{R}$. Tällöin*

a) $s_t \circ k_\varphi = k_\varphi \circ s_{t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}$,

b) $s_t \circ p = p \circ s_{\bar{t}}$ *ja*

c) $k_\varphi \circ p = p \circ k_{-\varphi}$.

4.5 Tason yhtenevyyskuvausten luokittelua

Edellinen luku osoitti, että pystymme ymmärtämään täysin, millaisia yhtenevyyskuvauksia tasossa on. Toisaalta siirto, kierto origon suhteen ja liittolukukuvaus, joiden avulla kaikki yhtenevyyskuvaukset pystytään muodostamaan, ovat ilmeisellä tavalla erilaisia yhtenevyyskuvauksia. Jalostetaan tämä huomio yhtenevyyskuvausten luokitteluksi. Ensimmäinen askel on osoittaa, että edellisen lauseen tapaukset eivät mene päällekäin.

Lemma 4.19. *Kaikilla $t, t', \varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$ pätee*

$$s_t \circ k_\varphi \neq s_{t'} \circ k_{\varphi'} \circ p.$$

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että joillakin $t, t', \varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$ on voimassa

$$s_t \circ k_\varphi = s_{t'} \circ k_{\varphi'} \circ p,$$

ts.

$$t + z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = t' + \overline{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'},$$

kun $z \in \mathbb{C}$. Sijoittamalla $z = 0$ saadaan

$$t = t + 0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}z = t' + \bar{0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'} = t',$$

joten alkuperäinen yhtälö supistuu yhtenevyyskuvausten ryhmässä muotoon

$$k_\varphi = k_{\varphi'} \circ p.$$

Sijoittamalla nyt $z = 1$ seuraa

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \bar{1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi'},$$

joten $k_\varphi = k_{\varphi'}$. Siis $\mathrm{id}_\mathbb{C} = p$, mikä on tietenkin mieletöntä. □

Määritelmä 4.20. Tason yhtenevyyskuvaus $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on *suora*, jos $f = s_t \circ k_\varphi$ joillain $t, \varphi \in \mathbb{R}$.

Lause 4.21. *Kuvaus $\varepsilon\colon \mathrm{Isom}(\mathbb{C}) \to \{0, 1\}$,*

$$\varepsilon(f) = \begin{cases} 1, & \text{kun } f \text{ on suora yhtenevyyskuvaus} \\ -1, & \text{muuten} \end{cases}$$

on homomorfismi kompleksitason yhtenevyyskuvausten ryhmästä $(\mathrm{Isom}(\mathbb{C}), \circ)$ kertolaskuryhmään $(\{0, 1\}, \cdot)$. Erityisesti suorat yhtenevyyskuvaukset muodostavat tason yhtenevyyskuvausten aliryhmän, so. $(G, \circ)$ on ryhmän $(\mathrm{Isom}(\mathbb{C}), \circ)$ aliryhmä, missä

$$G = \mathrm{Ker}(\varepsilon) = \{\, f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}) \mid f \text{ on suora yhtenevyyskuvaus}\}.$$

Todistus. Olkoot $f, g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C})$. Tarkastellaan eri tapauksia:

1) Oletetaan, että f ja g ovat molemmat suoria eli $\varepsilon(f) = \varepsilon(g) = 1$. Tällöin $f = s_t \circ k_\varphi$ ja $g = s_u \circ k_\psi$ joillakin $t, u \in \mathbb{C}$ ja $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Tällöin lemman 4.18 nojalla

$$\begin{aligned} f \circ g &= (s_t \circ k_\varphi) \circ (s_u \circ k_\psi) = s_t \circ (k_\varphi \circ s_u) \circ k_\psi \\ &= s_t \circ s_{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \circ k_\varphi \circ k_\psi = s_{t+u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \circ k_{\varphi+\psi} \end{aligned}$$

on suora yhtenevyyskuvaus, joten $\varepsilon(f \circ g) = 1 = 1 \cdot 1 = \varepsilon(f) \cdot \varepsilon(g)$.

2) Oletetaan, että $\varepsilon(f) = 1$ ja $\varepsilon(g) = -1$. Tällöin $f = s_t \circ k_\varphi$ ja $g = s_u \circ k_\psi \circ p$ joillakin $t, u \in \mathbb{C}$ ja $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Edellisen kohdan avulla saadaan

$$f \circ g = (s_t \circ k_\varphi) \circ (s_u \circ k_\psi \circ p) = (s_t \circ k_\varphi \circ s_u \circ k_\psi) \circ p = s_{t+u\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \circ k_{\varphi+\psi} \circ p,$$

joten $f \circ g$ ei ole suora. Siis $\varepsilon(f \circ g) = -1 = 1 \cdot -1 = \varepsilon(f) \cdot \varepsilon(g)$.

3) Oletetaan, että $\varepsilon(f) = -1$ ja $\varepsilon(g) = 1$. Tällöin $f = s_t \circ k_\varphi \circ p$ ja $g = s_u \circ k_\psi$ joillakin $t, u \in \mathbb{C}$ ja $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Tällöin lemman 4.18 nojalla

$$\begin{aligned} f \circ g &= (s_t \circ k_\varphi \circ p) \circ (s_u \circ k_\psi) = s_t \circ k_\varphi \circ (p \circ s_u) \circ k_\psi \\ &= s_t \circ k_\varphi \circ (s_{\overline{u}} \circ p) \circ k_\psi = s_t \circ (k_\varphi \circ s_{\overline{u}}) \circ (p \circ k_\psi) \\ &= s_t \circ s_{\overline{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \circ k_\varphi \circ k_{-\psi} \circ p = s_{t+\overline{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \circ k_{\varphi-\psi} \circ p, \end{aligned}$$

joten $f \circ g$ ei ole suora. Siis $\varepsilon(f \circ g) = -1 = -1 \cdot 1 = \varepsilon(f) \cdot \varepsilon(g)$.

4) Oletetaan, että $\varepsilon(f) = \varepsilon(g) = -1$, jolloin $f = s_t \circ k_\varphi \circ p$ ja $g = s_u \circ k_\psi \circ p$ joillakin $t, u \in \mathbb{C}$ ja $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Edellisestä kohdasta seuraa

$$\begin{aligned} f \circ g &= (s_t \circ k_\varphi \circ p) \circ (s_u \circ k_\psi \circ p) = (s_t \circ k_\varphi \circ p \circ s_u \circ k_\psi) \circ p \\ &= (s_{t+\overline{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \circ k_{\varphi-\psi} \circ p) \circ p = s_{t+\overline{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \circ k_{\varphi-\psi} \circ (p \circ p) = s_{t+\overline{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \circ k_{\varphi-\psi}, \end{aligned}$$

joten $f \circ g$ on suora yhtenevyyskuvaus. Siis $\varepsilon(f \circ g) = 1 = -1 \cdot -1 = \varepsilon(f) \cdot \varepsilon(g)$.

Koska ε on homomorfismi, niin $(\mathrm{Ker}(\varepsilon), \circ)$ on $(\mathrm{Isom}(\mathbb{C}), \circ)$:n aliryhmä, missä

$$\mathrm{Ker}(\varepsilon) = \{\, f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}) \mid \varepsilon(f) = 1 \,\} = \{\, f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{C}) \mid f \text{ on suora} \,\}. \qquad \square$$

Jotta saataisiin tarkempi kuva yhtenevyyskuvauksista, tarkastellaan niiden kiintopisteitä.

Määritelmä 4.22. Alkio $a \in A$ on kuvauksen $f\colon A \to A$ *kiintopiste*, jos $f(a) = a$.

Lemma 4.23. *Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ yhtenevyyskuvauksen f $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kiintopisteiden joukko $\{\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\bar{x}) = \bar{x} \,\}$ on joko tyhjä tai $\mathbb{R}^n$:n affiini aliavaruus.*

Todistus. HT $\square$

Identtinen kuvaus:

Edellisen lemman nojalla tason yhtenevyyskuvauksen kiintopisteiden joukko on koko taso, jokin suora, yksiö tai tyhjä joukko. Selvästi $\mathrm{id}_\mathbb{C}$ on tässä suhteessa omassa kategoriassaan, sillä se on ainoa yhtenevyyskuvaus, jolle jokainen kompleksiluku on kiintopiste. Lisäksi $\mathrm{id}_\mathbb{C}$ on suora yhtenevyyskuvaus.

Epätriviaalit siirrot:

Olkoon $t \in \mathbb{C}$, $t \neq 0$. Tällöin kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee $s_t(z) = z + t \neq z$, joten siirrolla s_t ei ole lainkaan kiintopisteitä. Jatkotarkastelu osoittaa, että muilla suorilla yhtenevyyskuvauksilla kuin siirroilla on aina täsmälleen yksi kiintopiste.

Kierto kulman φ verran kiintopisteen z_0 ympäri:

Olkoon $t \in \mathbb{C}, \varphi \in]0, 2\varphi[$. Tällöin $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \neq 1$. Piste z on yhtenevyyskuvauksen $f = s_t \circ k_\varphi$ kiintopiste, jos ja vain jos

$$\begin{aligned} f(z) = z &\Leftrightarrow t + z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = z \\ &\Leftrightarrow z(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = t \\ &\Leftrightarrow z = t(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^{-1}. \end{aligned}$$

Siis kuvauksella f on tällöin täsmälleen yksi kiintopiste, nimittäin $z_0 = t(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^{-1}$.

Kun $z \in \mathbb{C}$, niin

$$\begin{aligned} f(z) = s_t(k_\varphi(z))) = t + z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = t + z_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + (z - z_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \qquad &= f(z_0) + (z - z_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \\ = z_0 + (z - z_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}. \end{aligned}$$

Siis

$$f(z) - z_0 = (z - z_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Kuvaus f on *kierto kulman φ verran kiintopisteen z_0 ympäri.*

Siirrytään käsittelemään tason yhtenevyyskuvauksia, jotka eivät ole suoria. Ne ovat siis muotoa

$$f = s_t \circ k_\varphi \circ p.$$

Jos $z \in \mathbb{C}$ on epäsuoran yhtenevyyskuvauksen f kiintopiste, niin

$$(f \circ f)(z) = f(f(z)) = f(z) = z$$

eli z on myös kuvauksen $f \circ f$ kiintopiste. Toisaalta edellisen lemman nojalla

$$\begin{aligned} f \circ f &= (s_t \circ k_\varphi \circ p) \circ (s_t \circ k_\varphi \circ p) = s_t \circ k_\varphi \circ (p \circ s_t) \circ k_\varphi \circ p \\ &= s_t \circ k_\varphi \circ (s_{\bar{t}} \circ p) \circ k_\varphi \circ p = s_t \circ (k_\varphi \circ s_{\bar{t}}) \circ (p \circ k_\varphi) \circ p \\ &= s_t \circ (s_{\bar{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \circ k_\varphi) \circ (k_{-\varphi} \circ p) \circ p = (s_t \circ s_{\bar{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}) \circ (k_\varphi \circ k_{-\varphi}) \circ (p \circ p) \\ &= s_{t+\bar{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} \circ (\mathrm{id}_\mathbb{C}) \circ (\mathrm{id}_\mathbb{C}) = s_{t+\bar{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}. \end{aligned}$$

Liukupeilaus:

Jos $t + \bar{t}e^{i\varphi} \neq 0$, niin $f \circ f$ on epätriviaali siirto eikä sillä ole kiintopisteitä. Tässä tapauksessa myöskään kuvauksella f ei ole kiintopisteitä. Tällaisia epäsuoria yhtenevyyskuvauksia f kutsutaan *liukupeilauksiksi*. Liukupeilauksia ei näissä luennoissa analysoida tarkemmin, mutta nimen voi paljastaa olevan kuvaava.

Peilaus suoran l suhteen:

Oletetaan sitten, että $t + \bar{t}e^{i\varphi} \neq 0$, jolloin $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Kaikki pisteet eivät tietenkään voi olla kuvauksen f kiintopisteitä (kuten ovat kuvauksen $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$), sillä f ei ole suora yhtenevyyskuvaus. Huomataan kuitenkin, että

$$f(t/2) = (s_t \circ k_\varphi \circ p)(t/2) = t + (\overline{t/2})e^{i\varphi} = t/2 + \frac{1}{2}(t + \bar{t}e^{i\varphi}) = t/2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = t/2.$$

Siis kuvauksella f on kiintopisteitä. Kuvauksen f kaikkien kiintopisteiden joukko on

$$\ell = \{\, z \in \mathbb{C} \mid f(z) = z \,\} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid t + \bar{z}e^{i\varphi} = z \,\} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid z - \bar{z}e^{i\varphi} - t = 0 \,\}.$$

Laskuharjoitusten perusteella tiedetään, että tällainen joukko on suora, kunhan joukko on epätyhjä. Siis f:n kiintopisteiden joukko ℓ on suora. Kuvausta f kutsutaan tässä tapauksessa *peilaukseksi suoran l suhteen*.

Sivumennen todettakoon, että muut yhtenevyyskuvaukset saadaan yhdistettyinä kuvauksina peilauksista (kolme riittää, jätetään tämä lukijan todettavaksi).

Yhteenvetona saadaan seuraava taulukko tason yhtenevyyskuvauksista:

kiintopisteiden joukko	**suorat yhtenevyyskuvaukset**	**epäsuorat yht.kuvaukset**
$\mathbb{C}$	$\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$	–
suora	–	peilaus suoran suhteen
yksiö	kierto	–
$\emptyset$	epätriviaali siirto	liukupeilaus

Esimerkki 4.24. Yhtenevyyskuvaus $f = p \circ s_1$ on esimerkki yhtenevyyskuvauksesta, joka ei ole siirto, mutta jolla ei ole myöskään kiintopisteitä. Kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee nimittäin

$$f(z) = \overline{z+1} = \bar{z} + 1$$

ja siis

$$(f \circ f)(z) = \overline{\overline{z+1}+1} = z + 2 \neq z.$$

Lisäksi

$$\mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(z) + 1,$$

joten kyseessä ei ole siirto, vaan liukupeilaus.

4.6 Symmetria

Aikojen saatossa geometria on vuorovaikuttanut muun matematiikan kanssa monin tavoin. Yksi merkittävimmisstä tavoista on, että geometristen symmetrioiden tarkastelemiseen on valjastettu ryhmäteoria. Ennen symmetrian käsitteen formalisoimista lähdetään liikkeelle tarkastelemaan tason yhtenevyyskuvausten ryhmää. Se on rakenteeltaan rikas ryhmä, jolla on monenlaisia aliryhmiä. Myöhemmin paljastuu, että vain osa näistä vastaa (tasokuvioiden) symmetrioita.

Esimerkki 4.25. Esitetään muutama esimerkki kompleksitason yhtenevyyskuvausten ryhmän $(\mathrm{Isom}(\mathbb{C}), \circ)$ aliryhmistä.

1) $(G_0, \circ)$, missä $G_0 = \{\mathrm{id}, p\}$.

2) $(G_1, \circ)$, missä $G_1 = \{\, k_\varphi \mid \varphi \in [0, 2\pi[\, \}$.

3) $(G_2, \circ)$, missä $G_2 = \{\, s_t \mid t \in \mathbb{R}^2 \,\}$.

Kaikissa näissä on alkiona identtinen kuvaus, sillä $\mathrm{id}_\mathbb{C} = k_0 = s_0$. Lisäksi G_0, G_1 ja G_2 ovat suljettuja kuvausten yhdistämisen suhteen, sillä

$$p \circ p = \mathrm{id},$$
$$k_\varphi \circ k_\psi = k_{\varphi+\psi}$$

ja

$$s_t \circ s_u = s_{t+u},$$

kun $\varphi, \alpha \in [0, 2\pi[$, $s, t \in \mathbb{C}$ ja huomataan, että $k_\theta = k_{\theta-2\pi}$, kun $\theta \geq 2\pi$. G_0, G_1 ja G_2 ovat myös suljettuja käänteiskuvausten suhteen, sillä $p^{-1} = p$, $k_\varphi^{-1} = k_{2\pi-\varphi}$ ja $s_t^{-1} = s_{-t}$.

Määritelmä 4.26. Olkoon $K \subseteq \mathbb{C}$ tasokuvio. Kuvion K *symmetriaryhmä* on $(\mathrm{Sym}(K), \circ)$, missä $\mathrm{Sym}(K)$ on niiden tason yhtenevyyskuvausten f joukko, joille

$$f[K] = \{\, f(x) \mid x \in K \,\} = K.$$

$\mathrm{Sym}(K)$:n alkioita kutsutaan K:n *symmetriakuvauksiksi* eli *symmetrioiksi*.

Lause 4.27. *Kuvion $K \subseteq \mathbb{C}$ symmetriaryhmä on ryhmä.*

Todistus. Pitää siis osoittaa, että $(\mathrm{Sym}(K), \circ)$ on kaikkien yhtenevyyskuvausten aliryhmä.

- $\mathrm{Sym}(K) \neq \emptyset$, sillä $\mathrm{id}_\mathbb{C} \in \mathrm{Sym}(K)$.

- $\mathrm{Sym}(K)$ on yhdistämisen suhteen suljettu, sillä kun $f, g \in \mathrm{Sym}(K)$, niin

$$(f \circ g)[K] = f[g[K]] = f[K] = K.$$

- Lisäksi f^{-1} on yhtenevyyskuvaus, jolle
$$f^{-1}[K] = f^{-1}[f[K]] = K,$$
koska f on bijektio.

Siis olemme osoittaneet, että kyseessä on aliryhmä. $\square$

Esimerkki 4.28. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{C}$ kolmion kärjet ja $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ vastaava kolmio sisuksineen. Olkoon $f \in \mathrm{Sym}(\Delta)$. Koska f säilyttää välissäolorelaation, niin
$$f[\{a, b, c\}] = \{a, b, c\}.$$
Siis
$$\sigma := f \restriction \{a, b, c\} : \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$$
on joukon $\{a, b, c\}$ permutaatio. Laskuharjoitustehtävästä seuraa, että σ määrää f:n. Siis jos $g \in \mathrm{Sym}(\Delta)$ ja $g \restriction \{a, b, c\} = \sigma$, niin $g = f$.

Edelleen havaitaan, että $(G, \circ)$ on joukon $\{a, b, c\}$ permutaatioryhmä, missä
$$G = \left\{ f \restriction \{a, b, c\} \;\middle|\; f \in \mathrm{Sym}(\Delta) \right\}.$$
Koska $f \restriction \{a, b, c\}$ määrää kuvauksen $f \in \mathrm{Sym}(\Delta)$, niin
$$|\mathrm{Sym}(\Delta)| = |G| \leq 6.$$
Symmetrioiden lukumäärä riippuu sivujen pituuksista seuraavasti:

1) Jos kaikki sivut ovat eri pituisia, niin jokaisella $f \in \mathrm{Sym}(\Delta)$ pätee välttämättä $f(a) = a, f(b) = b$ ja $f(c) = c$, joten
$$\{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Sym}(\Delta).$$
Siis symmetrioiden lukumäärä on 1.

2) Oletetaan, että Δ on tasakylkinen, mutta ei tasasivuinen. Oletetaan, että ab on kanta ja ac, bc kyljet. Siis $ac \equiv bc \not\equiv ab$. Tällöin laskuharjoitusten perusteella on olemassa kuvaus $f \in \mathrm{Sym}(\Delta)$, jolle $f(a) = f(b), f(b) = f(a)$ ja $f(c) = c$. Pisteitä ei myöskään voida permutoida muilla epätriviaaleilla tavoille. Siis $\mathrm{Sym}(\Delta) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}, f\}$.

3) Oletetaan, että Δ on tasasivuinen. Tällöin mille tahansa joukon $\{a, b, c\}$ permutaatiolle σ pätee
$$ab \equiv \sigma(a)\sigma(b), \quad ac \equiv \sigma(a)\sigma(c), \quad bc \equiv \sigma(b)\sigma(c).$$
Harjoitustehtävän perusteella kukin näistä voidaan laajentaa yhtenevyyskuvaukseksi. Symmetrioita on siis 6 kappaletta.

Lause 4.29. *Olkoon $K \subseteq \mathbb{C}$ epätyhjä tasokuvio, jonka symmetriaryhmä sisältää epätriviaalin siirron. Tällöin K on rajoittamaton eli se sisältää mielivaltaisen etäällä toisistaan olevia pisteitä.*

Todistus. Valitaan $s_t \in \mathrm{Sym}(K)$, jolle $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $a \in K$. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$

$$s_t^n = s_t \circ \cdots \circ s_t = s_{nt} \in \mathrm{Sym}(K),$$

joten

$$s_t^n(a) = s_{nt}(a) = a + nt \in K.$$

Siis kaikki pisteet $a + nt$, missä $n \in \mathbb{N}$ ovat kuvion K pisteitä ja $|s_t^n(a) - a| = |nt| \to \infty$, kun $n \to \infty$, joten K on rajoittamaton. □

Esimerkki 4.30. Aiemmin on todettu, että siirrot muodostavat aliryhmän. Merkitään $S = \{ s_t \mid t \in \mathbb{C} \}$. Siirtojen ryhmä $(S, \circ)$ ei ole kuitenkaan minkään joukon symmetriaryhmä: Osoitetaan nimittäin, että jos tasokuviolle $K \subseteq \mathbb{C}$ pätee $S \subseteq \mathrm{Sym}(K)$, niin $K = \emptyset$ tai $K = \mathbb{C}$. Kuitenkin $(\mathrm{Sym}(\mathbb{C}), \circ) = (\mathrm{Sym}(\emptyset), \circ) = (\mathrm{Isom}(\mathbb{C}), \circ)$ on kaikkien yhtenevyyskuvausten joukko, jolloin $S \neq \mathrm{Sym}(\mathbb{C}) = \mathrm{Sym}(\emptyset)$, ja $(S, \circ)$ ei siis ole K:n symmetriaryhmä.

Voidaan olettaa, että $K \neq \emptyset$; valitaan $a \in K$. Kaikille $t \in \mathbb{C}$ pätee $s_{t-a} \in S$, joten

$$t = a + t - a = s_{t-a}(a) \in K.$$

Siis jos $K \neq \emptyset$ ja $\mathrm{Sym}(K)$ sisältää siirrot, niin $K = \mathbb{C}$.

Esimerkki 4.31. Lasketaan x-akselin $\mathbb{R} = \{ x + 0 \cdot \mathrm{i} \mid x \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}$ symmetriat.

Jokaisella yhtenevyyskuvauksella f on esitys

$$f = s_t \circ k_\varphi$$

tai

$$f = s_t \circ k_\varphi \circ p,$$

missä $t \in \mathbb{C}, \varphi \in [0, 2\pi[$; tutkitaan, mitkä näistä ovat $\mathbb{R}$:n symmetrioita.

Ensiksi havaitaan, että kun $t \in \mathbb{R}$, niin kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$s_t(x) = x + t \in \mathbb{R}$$

ja

$$((s_t \circ p)(x) = s_t(p(x)) = x + \overline{t} = x + t \in \mathbb{R}.$$

Siis $s_t[\mathbb{R}] \subseteq \mathbb{R}$ ja $(s_t \circ p)[\mathbb{R}] \subseteq \mathbb{R}$. Kun otetaan huomioon, että $s_t^{-1} = s_{-t}$ ja $(s_t \circ p)^{-1} = p^{-1} \circ s_t^{-1} = p \circ s_{-t} = s_{\overline{-t}} \circ p = s_{-t} \circ p$, saadaan myös $s_t^{-1}[\mathbb{R}] \subseteq \mathbb{R}$ ja $(s_t \circ p)^{-1}[\mathbb{R}] \subseteq \mathbb{R}$, mistä seuraa

$$s_t[\mathbb{R}] = \mathbb{R}, \quad (s_t \circ p)[\mathbb{R}] = \mathbb{R}.$$

Siis $s_t, s_t \circ p \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R})$, kun $t \in \mathbb{R}$.

Tarkastellaan sitten kuvauksia $f = s_t \circ k_\varphi$, missä $\varphi \neq 0$. Nämä ovat siis epätriviaaleja kiertoja. Kuvaukselle f pätee

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) &= s_t(k_\varphi(1)) - s_t(k_\varphi(0)) \\ &= s_t(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) - s_t(0)) = (t + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) - t \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}. \end{aligned}$$

Jos $\varphi \neq \pi$, niin $e^{i\varphi} \notin \mathbb{R}$ ja siis jompikumpi pisteistä $f(1)$ tai $f(0)$ ei ole reaalinen, joten $f \notin \mathrm{Sym}(\mathbb{R})$.

Jos sen sijaan $\varphi = \pi$, niin kaikilla $x \in \mathbb{R}$ saadaan

$$f(x) = (s_t \circ k_\pi)(x) = xe^{i\pi} + t = -x + t \in \mathbb{R}.$$

Siis $f[\mathbb{R}] \subseteq \mathbb{R}$, ja koska yhtenevyyskuvaus kuvaa suoran suoraksi, täytyy olla $f[\mathbb{R}] = \mathbb{R}$. Siten $f \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R})$.

Käsitellään lopuksi tapaus $f = s_t \circ k_\varphi \circ p$, missä $\varphi \neq 0$. Tässä tapauksessa

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) &= s_t(k_\varphi(p(1))) - s_t(k_\varphi(p(0))) = (e^{i\varphi}\overline{1} + t) - (e^{i\varphi}\overline{0} + t) \\ &= (e^{i\varphi} \cdot 1) - (e^{i\varphi} \cdot 0) = e^{i\varphi} - 0 = e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Jos $\varphi \neq \pi$, niin $e^{i\varphi} \notin \mathbb{R}$, josta seuraa $f \notin \mathrm{Sym}(\mathbb{R})$. Jos sen sijaan $\varphi = \pi$, niin

$$f(x) = (s_t \circ k_\pi \circ p)(x) = \overline{x}e^{i\varphi} + t = x \cdot (-1) + t = t - x,$$

kun $x \in \mathbb{R}$, ja $t - x \in \mathbb{R}$, jos ja vain jos $t \in \mathbb{R}$. Tästä seuraa, että $s_t \circ k_\pi \circ p \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R})$ täsmälleen silloin, kun $t \in \mathbb{R}$. Siis

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{R}) = \{\, t, p \circ s_t, r_\pi \circ s_t, p \circ r_\pi \circ s_t \mid t \in \mathbb{R} \,\}.$$

Symmetriaryhmän siis virittävät x-akselin suuntaiset siirrot, peilaus p ja kierto k_π.

Merkintöjä. *Olkoon K tasokuvio. Merkitään jokaisella yhtenevyyskuvauksella f*

$$\mathrm{Fix}(f) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid f(z) = z \,\}.$$

Merkitään lisäksi

$$\mathrm{Fix}(K) = \bigcup_{f \in \mathrm{Sym}(K)} \mathrm{Fix}(f).$$

Aiemmin on jo todettu, että $\mathrm{Fix}(K)$ on aina joko tyhjä tahi yksiö, suora tai koko taso.

Määritelmä 4.32. Olkoon K tasokuvio. Jos jollakin pisteellä $a \in \mathbb{C}$ pätee

$$\bigcap_{f \in \mathrm{Sym}(K)} \mathrm{Fix}(f) = \{a\},$$

niin pistettä a kutsutaan kuvion K *symmetriakeskipisteeksi* eli *symmetriakeskukseksi*. Jos jollakin suoralla $l \subseteq \mathbb{C}$ pätee, että $p_l \in (sym(K))$, niin suoraa l kutsutaan kuvion K *symmetria-akseliksi.*

Esimerkki 4.33. Olkoon l tason suora. Tällöin l:llä ei ole symmetriakeskusta. Olkoon $z, w \in l, z \neq w$. Nyt

$$s_{z-w} \in \mathrm{Sym}(l).$$

Koska s_{z-w} on epätriviaali siirto, niin sillä ei ole kiintopisteitä. Siis $\mathrm{Fix}(s_{z-w}) = \emptyset$, mistä seuraa $\bigcap_{f \in \mathrm{Sym}(l)} \mathrm{Fix}(f) = \emptyset$. Siis suorilla ei ole symmetrikeskuksia, kuten luonnollista onkin.

Määritelmä 4.34. Tason yhtenevyyskuvaus f on *peilaus*, jos

$$f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \quad f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{C}}.$$

Edellisessä alaluvussa läpikäydyn yhtenevyyskuvausten luokittelun perusteella on helppoa todeta, mitkä kuvaukset ovat peilauksia. Peilaukset jonkin suoraan suhteen ovat tietenkin tällaisia, mutta identtinen kuvaus ei ole eivätkä epätriviaalit siirrot. Samoin mistä tahansa liukupeilauksesta f tiedetään, että $f \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Jäljelle jäävät enää kierrot jonkin pisteen suhteen. Jos f on kierto pisteen z_0 suhteen kulman φ verran, missä $0 < \varphi < 2\pi$, niin

$$f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \varphi = \pi:$$

Jokaisella $z \in \mathbb{C}$ pätee nimittäin

$$f(z) = z_0 + (z - z_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

joten

$$(f \circ f)(z) = z_0 + (z - z_0)\mathrm{e}^{2\pi i}.$$

Siis $f \circ f$ on kierto pisteen z_0 suhteen kulman 2φ verran. Se on epätriviaali kierto muulloin, paitsi kun $2\varphi = 2\pi$ eli $\varphi = \pi$. Kuvaus f on tällöin *peilaus pisteen* z_0 *suhteen* ja

$$f(z) = z_0 + (z - z_0)\mathrm{e}^{i\pi} = z_0 + (z - z_0)(-1) = 2z_0 - z.$$

$K \subseteq \mathbb{C}$ on *rajoitettu*, jos se sijaitsee jonkin ympyrän sisäpuolella. Tutkitaan tämän luvun lopuksi, millaisia symmetriaominaisuuksia on rajoitetuilla tasokuvioilla.

Lemma 4.35. *Rajoitetun tasokuvion symmetriaryhmässä on identtisen kuvauksen lisäksi vain kiertoja ja peilauksia.*

Todistus. Olkoon $K \subseteq \mathbb{C}$ rajoitettu ja $f \in \mathrm{Sym}(K)$. Tällöin aiemman tuloksen mukaan f ei voi olla epätriviaali siirto. Siis tiedetään, että jos f on suora yhtenevyyskuvaus, niin f on (mahdollisesti triviaali) kierto. Jos taas f on epäsuora eli $f = p \circ k_\varphi \circ s_t$ joillakin $\varphi \in [0, 2\pi[$ ja $t \in \mathbb{C}$, niin $f \circ f \in \mathrm{Sym}(K)$ on siirto. Siirto $f \circ f$ ei kuitenkaan voi olla epätriviaali, joten $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Siis f on tällöin peilaus. □

Lemma 4.36. *Olkoon $K \subseteq \mathbb{C}$ rajoitettu. Olkoot f kierto, jonka kiertokeskus on a ja g kierto, jonka kiertokeskus on b. Jos $f, g \in \mathrm{Sym}(K)$, niin $a = b$.*

Todistus. HT □

Lemma 4.37. *Olkoon $K \neq \emptyset$ rajoitettu pistejoukko, f epätriviaali kierto pisteen a ympäri ja $p_l, p_{l'}$ peilauksia suorien l ja l' suhteen. Tällöin*

1) Jos $f, p_l \in \mathrm{Sym}(K)$, niin piste a on suoralla l.

2) Jos $p_l, p_{l'} \in \mathrm{Sym}(K)$, $l \neq l'$, niin l ja l' eivät ole yhdensuuntaisia eli ne leikkaavat.

Todistus. Sivuutetaan (HT). □

Lause 4.38. *Olkoon $K \neq \emptyset$ rajoitettu tasokuvio. Oletetaan, että K:lla on epätriviaali symmetriaryhmä, ts. on olemassa sellainen $f \in \mathrm{Sym}(K)$, että $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Tällöin K:lla on joko symmetriakeskus tai $\mathrm{Fix}(K)$ on suora.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathrm{Sym}(K)$ sisältää epätriviaaleja kiertoja. Olkoon $f \in \mathrm{Sym}(K)$ tälläinen ja a sen symmetriakeskus. Olkoon $g \in \mathrm{Sym}(K)$ mielivaltainen. Jos $g = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, niin a on sen kiintopiste. Muutoin g on kierto tai peilaus suoran suhteen. Molemmissa tapauksissa edellisten lemmojen mukaan a on sen kiintopiste. Siis

$$\bigcap_{f \in \mathrm{Sym}(K)} \mathrm{Fix}(f) = \{a\}.$$

Oletetaan sitten, että $\mathrm{Sym}(K)$ ei sisällä epätriviaaleja kiertoja. Nyt valitaan $f \in \mathrm{Sym}(K)$, $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Siis jollakin suoralla l pätee $f = p_l$. Itseasiassa $\mathrm{Sym}(K) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}, p_l\}$, sillä jos pätisi $p_{l'} \in \mathrm{Sym}(K)$, niin l ja l' leikkaisivat yhdessä pisteessä tai olisivat samat. Edellisessä $p_l \circ p_{l'}$ olisi kierto leikkauspisteen suhteen (HT), mikä on ristiriita. □