1 Lineaarialgebran pikakertaus

Analyyttistä geometriaa tehdään suurimmaksi osaksi euklidisissa avaruuksissa, mikä edellyttää lineaarialgebran perusteiden hallitsemista. Tässä luvussa näitä perusteita kerrataan nimenomaan geometrian tarpeiden perspektiivistä.

Määritelmä 1.1. Epätyhjästä joukosta V muodostuu *reaalinen vektoriavaruus*, kun se varustetaan *vektorisummalla* $+\colon V \times V \to V$ ja *skalaarikerronnalla* $\cdot\colon \mathbb{R} \times V \to V$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

a) $(V, +)$ on Abelin ryhmä eli $+$ on sekä liitännäinen että vaihdannainen laskutoimitus, $+$:lla on neutraalialkio $\mathbf{0}$ (*nollavektori*) ja jokaisella $x \in V$ on *vastavektori* $-x \in V$.

b) Skalaarikerronnalle toteuttaa seuraavat ehdot: kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ ja $x, y \in V$ pätee

   1) $a(bx) = (ab)x$
   2) $(a + b)x = ax + bx$
   3) $a(x + y) = ax + ay$
   4) $1 \cdot x = x$

Prototyyppisiä esimerkkejä reaalisista vektoriavaruuksista ovat juuri euklidiset avaruudet $\mathbb{R}^n$ ja niiden aliavaruudet. Vektorisumma ja skalaarikerronta määritellään niissä koordinaateittain: Kun $a \in \mathbb{R}, \mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1}), \mathbf{y} = (y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, niin

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_0 + y_0, \ldots, x_{n-1} + y_{n-1}) \text{ ja} \\ a\mathbf{x} &= (ax_0, \ldots, ax_{n-1}). \end{aligned}$$

Yksinkertaisimmat geometriset oliot ovat euklidisien avaruuksien aliavaruuksia.
Aliavaruuskriteeri: U on vektoriavaruuden V aliavaruus, jos ja vain jos $\emptyset \neq U \subset V$ ja

1) kaikilla $x, y \in U$ pätee $x + y \in U$ (vektorisumman suhteen suljettu)

2) kaikilla $a \in \mathbb{R}$ ja $x \in U$ pätee $ax \in U$ (skaalauksen suhteen suljettu)

Fakta. $\mathbb{R}^3$:n vektorialiavaruudet ovat

0) $\{\mathbf{0}\}$,

1) origon kautta kulkevat $\mathbb{R}^3$:n suorat,

2) origon kautta kulkevat $\mathbb{R}^3$:n tasot,

3) $\mathbb{R}^3$.

Huomattakoon, että nämä kaikki kulkevat (triviaalisti) origon kautta. Affiinin geometrian yhteydessä opitaan ymmärtämään, että kaikki tasot saadaan siirtämällä origon kautta kulkevia kaksiulotteisia aliavaruuksia sopivasti.

Lineaarikuvaukset ovat monin tavoin merkityksellisiä, mutta analyyttisen geometrian kannalta erityisen kiintoisaa on, että niiden avulla geometrisille olioille saadaan esityksiä.

Määritelmä 1.2. Kuvaus $A\colon U \to V$ reaalisesta vektoriavaruudesta U reaaliseen vektoriavaruuteen V on *lineaarikuvaus*, jos kaikilla $x, y \in U$ ja $c \in \mathbb{R}$ pätee

1. $A(x+y) = A(x) + A(y)$ ja

2. $A(cx) = cA(x)$.

Laskuharjoitusten varaan jätetään sen mieleen palauttaminen, että kun $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ on lineaarikuvaus, U euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^m$ aliavaruus ja V euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus, niin

$A[U]$ on $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus ja

$A^{-1}[V]$ on $\mathbb{R}^m$n aliavaruus

eli lineaarikuvauksissa aliavaruuksien kuvat ja alkukuvat ovat myös aliavaruuksia.

Parametriesitys

Kun $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ on lineaarikuvaus, niin erityisesti $W = \mathrm{Im}(A) = A[\mathbb{R}^m]$ on $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus. Tässä tapauksessa kuvan W voi tulkita lineaarikuvauksen A kautta parametriesitetyksi avaruudeksi.

Esimerkki 1.3. Kun matriisit ja lineearikuvaukset samastetaan, niin

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$$

on lineaarikuvaus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja

$$\begin{aligned} W &= \mathrm{Im}(A) = A[\mathbb{R}^2] \\ &= \{\, A(t,u) \mid (t,u) \in \mathbb{R}^2 \,\} \\ &= \{\, (3t+2u, u, -7t+6u) \mid (t,u) \in \mathbb{R}^2 \,\}. \end{aligned}$$

W on siis niiden pisteiden (x, y, z) joukko, jotka ovat muotoa

$$\begin{cases} x = 3t + 2u \\ y = u, \\ z = -7t + 6u \end{cases}$$

joillakin $t, u \in \mathbb{R}$. Tarkempi tarkastelu osoittaa, että W on taso.

Yhtälöesitys

Kun $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ on lineaarikuvaus, niin erityisesti lineaarikuvauksen *ydin* $W = \mathrm{Ker}(A) = A^{-1}[\{\mathbf{0}\}]$ on $\mathbb{R}^m$:n vektorialiavaruus.

Esimerkki 1.4. Tarkastellaan kuvausta

$$B = \begin{pmatrix} 12 & 1 & 17 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2.$$

Sen ydin on

$$\begin{aligned} W &= \mathrm{Ker}(A) = A^{-1}[\{\mathbf{0}\}] \\ &= \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid B(x, y, z) = \mathbf{0} = (0, 0) \,\} \\ &= \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (12x + y + 17z, -3x + y + 2z) = (0, 0) \,\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 12x + y + 17z = 0 \\ -3x + y + 2z = 0 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

Epämuodollisemmin: W on yhtälöparin

$$\begin{cases} 12x + y + 17z = 0 \\ -3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

määrämä suora.

Dimensio

Kuten aiemmin todettiin, $\mathbb{R}^3$:n vektorialiavaruudet ovat origon yksiö, origon kautta kulkevat suorat, origon kautta kulkevat tasot ja $\mathbb{R}^3$ itse. Ne voidaan siis luokitella sen mukaan, kuinka monta ulottuvuutta aliavaruudessa on. Tämän alaluvun tavoite on esitellä ulottuvuusluku eli dimensio täsmällisesti. Tähän tarvitaan virittäjistöjen, vapauden ja kantojen määritelmät.

Määritelmä 1.5. Olkoon V reaalinen vektoriavaruus.

a) Vektoriavaruuden V osajoukko S on V:n *virittäjistö*, jos jokainen $x \in V$ voidaan esittää muodossa
$$x = \sum_{s \in S_0} \lambda_s \cdot s,$$
missä $\lambda_s \in \mathbb{R}$, kun $s \in S_0$, ja $S_0 \subseteq S$ on äärellinen.

b) Joukko $I \subseteq V$ on *vapaa*, jos se toteuttaa seuraavan vapausehdon: jos I:n vektoreista muodostetulle lineaarikombinaatiolle pätee $\sum_{x \in I_0} \lambda_x \cdot x = \mathbf{0}$, missä $I_0 \subseteq I$ on äärellinen, niin jokaisella $x \in I_0$ on voimassa $\lambda_x = 0$.

c) Joukko $K \subseteq V$ on V:n kanta, jos se on yhtäaikaisesti V:n virittäjistö ja vapaa V:ssä.

Lause 1.6 (Kantalause)**.** *Jokaisella reaalisella vektoriavaruudella on kanta. Minkä tahansa reaalisen vektoriavaruuden V kaikki kannat ovat yhtämahtavia.*

Kantalauseen nojalla seuraava määritelmä on mahdollinen.

Määritelmä 1.7. Reaalisen vektoriavaruuden V *dimensio* on
$$\dim(V) = |K|,$$
missä K on mikä tahansa vektoriavaruuden V kanta.

Huomautus. Vektoriavaruuden kanta voi olla ääretön, jolloin sen dimensio on ääretön kardinaali, joita käsitellään kurssilla Joukko-oppi. Tällä kurssilla huomio kuitenkin kiinnittyy miltei yksinomaisesti äärellisulotteisiin vektoriavaruuksiin, joiden dimensiot ovat yksinkertaisesti luonnollisia lukuja.