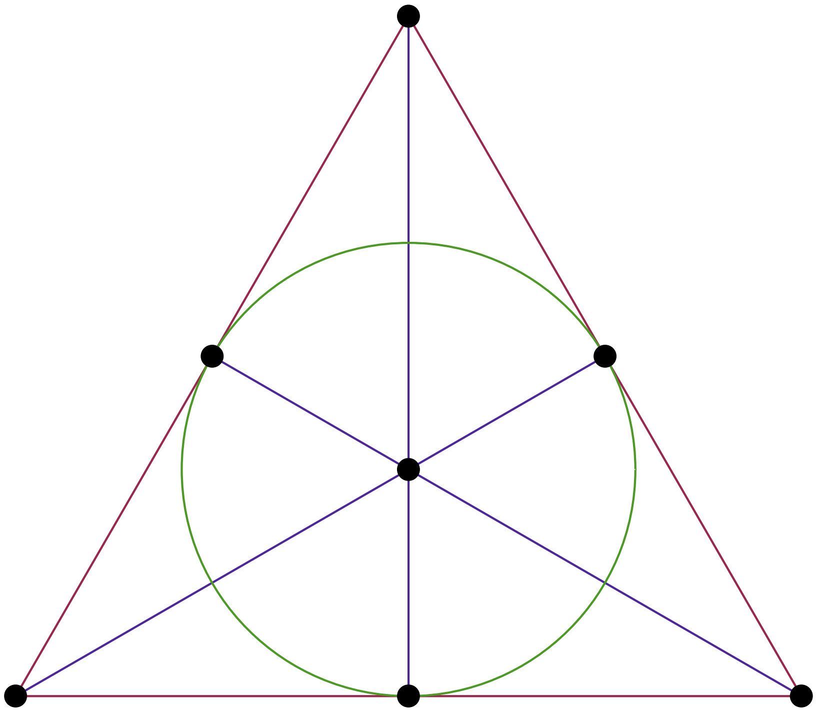
Affiini ja projektiivinen geometria

Tietokonegrafiikan geometria

Kerkko Luosto



Tampereen yliopisto

Kevät 2023

3 Projektiivista geometriaa

3.1 Peruskäsitteet

Määritelmä 3.1. Vektoriavaruutta V vastaava *projektiivinen avaruus* on

$$\mathrm{P}(V) = \{\, \ell \subseteq V \mid \ell \text{ on } V\text{:n aliavaruus, jolle } \dim(\ell) = 1 \,\}.$$

Projektiivisen avaruuden $\mathrm{P}(V)$ *(projektiivinen) dimensio* on $\dim(\mathrm{P}(V)) = \dim(V) - 1$, missä sovitaan, että $\dim(V) - 1 = \dim(V)$, jos V on ääretönulotteinen. Joukko X on $\mathrm{P}(V)$:n *projektiivinen aliavaruus*, jos $X = \mathrm{P}(W)$ jollakin V:n vektorialiavaruudella W.

Erikoinen erikoistapaus saadaan, kun V on triviaali vektoriavaruus, ts. $V = \{\mathbf{0}\}$. Triviaali vektoriavaruus ei tietenkään sisällä yhtään yksiulotteista aliavaruutta, joten tällöin $\mathrm{P}\, V = \emptyset$. Tämä on täysin hyväksyttävää, ja tätä pystytään käyttämään jopa hyväksi sikäli, että projektiivisten (saman kerroinkunnan) avaruuksien leikkaus osoittautuu olevan aina projektiivinen avaruus. Tämä on siis toisin kuin affiinissa geometriassa, jossa affiinien aliavaruuksien leikkaus (jopa kahden suoran) voi olla tyhjä, joka ei ole affiini aliavaruus. Määritelmän mukaan $\dim(\mathrm{P}(\{\mathbf{0}\})) = \dim(\{\mathbf{0}\}) - 1 = 0 - 1 = -1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Muutoin dimensiot ovat äärellisulotteisessa tapauksessa luonnollisia lukuja ja yleisessä tapauksessa kardinaaleja.

Oletetaan nyt, että V on epätriviaali vektoriavaruus. Tällöin

$$\bigcup \mathrm{P}(V) = \bigcup_{\ell \in \mathrm{P}(V)} \ell = V,$$

sillä jokainen $x \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ virittää yksiulotteisen aliavaruuden $\mathrm{sp}(\{x\})$. Tästä seuraa, että jos V ja W ovat saman kerroinkunnan eri vektoriavaruuksia, niin myös $\mathrm{P}(V) \neq \mathrm{P}(W)$, sekä myös, että jos W on V:n vektorialiavaruus, niin $\mathrm{P}(V) \subseteq \mathrm{P}(W)$. Yllä esitetty projektiivisen aliavaruuden määritelmä on tässä mielessä mielekäs.

Lause 3.2. *Olkoon $\mathcal{V}$ epätyhjä perhe vektoriavaruuden W aliavaruuksia. Tällöin $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} \mathrm{P}(V)$ on projektiivinen avaruus.*

Projektiivisille avaruuksille voidaan käyttää vastaavanlaisia nimityksiä kuin affineille avaruuksille:

Määritelmä 3.3. Vektoriavaruuteen V liittyvä projektiivinen avaruus $X = \mathrm{P}(V)$ on *projektiivinen suora*, jos $\dim(X) = 1$, ja *projektiivinen taso*, jos $\dim(X) = 2$. Projektiivisen avaruuden X projektiivinen aliavaruus $Y = \mathrm{P}(W)$ on *hypertaso*, jos vektorialiavaruus W on V:n hypertaso.

On kuitenkin hyvä huomata seuraava mahdollinen kompastuskivi: Jos X on projektiivinen suora, niin dimension määritelmästä seuraa välittömästi, että vastaava vektoriavaruus $\bigcup$ on kaksiulotteinen, siis taso. Jos X on projektiivinen taso, niin vastaavasti $\dim(\bigcup X) = 3$.

3.2 Affiinin aliavaruuden suhde projektiiviseen avaruuteen

Olkoon V K-vektoriavaruus, missä kerroinkunnan $(K, +, \cdot)$ karakteristika ei ole kaksi. Olkoon H affiini hypertaso V:ssä, jolle $\mathbf{0} \notin H$, ts. H ei kuitenkaan ole vektorialiavaruus. Jokaisen $x \in H$ kautta kulkee projektiivisen avaruuden $\mathrm{P}(V)$ jokin piste $\ell \in \mathrm{P}(V)$, nimittäin $x \in \ell = \mathrm{sp}(\{x\})$. Tutkitaan kääntäen, miten projektiivisen avaruuden $\mathrm{P}(V)$ pisteet leikkaavat hypertasoa H. Merkitään jatkossa H:n suunta-avaruutta U:lla, ja kiinnitetään hypertasosta yksi piste $a \in H$. Merkitään myös $n = \dim(V)$ ja valitaan U:lle kanta E.

Olkoon $\ell \in \mathrm{P}(H)$. Koska $\dim(\ell) = 1$, on olemassa $x \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, jolle $\ell = \mathrm{sp}(\{x\})$. Erotetaan kaksi eri tapausta:

1) Oletaan ensin, että $x \notin U$. Tällöin $E \cup \{x\}$ on vapaa, ja koska $|E \cup \{x\}| = |E| + 1 = \dim(H) + 1 = n - 1 + 1 = n$, sillä H on V:n hypertaso, niin $E \cup \{x\}$ on V:n kanta. Erityisesti on olemassa skalaarit $\mu_e \in K$, $e \in E$, ja $\lambda \in K$, joille
$$a = \lambda x + \sum_{e \in E} \mu_e e = \lambda x + u,$$
missä tietenkin $u = \sum_{e \in E} \mu_e e \in U$. Havaitaan, että tässä esityksessä $u \in U$ ja $\lambda \in K$ ovat yksikäsitteisiä. Lisäksi
$$a - u = \lambda x \in \ell \cap H.$$
Esityksen $a = \lambda x + u$ yksikäsitteisyydestä seuraa, että λx on ainoa suoran ℓ piste, joka leikkaa hypertasoa H, ts. $\ell \cap H = \{\lambda x\}$.

2) Oletetaan sitten, että $x \in U$. Tämän kanssa on yhtäpitävää, että $\ell = \mathrm{sp}(\{x\}) \subseteq U$ eli $\ell \in \mathrm{P}(U)$, ts. projektiivinen piste ℓ on $\mathrm{P}(V)$:n projektiivisen aliavaruudenkin $\mathrm{P}(U)$ piste. Koska H on hypertaso mutta ei kuitenkaan vektorialiavaruus, niin $H \subseteq U = \emptyset$, mistä seuraa $\ell \cap H = \emptyset$.

Yhteenvetona voidaan todeta, että kuvaus $j\colon H \to \mathrm{P}(V)$, $j(v) = \mathrm{sp}(\{v\})$ on injektio. Lisäksi jokaisella $v \in H$ pätee $j(v) \cap H = \{x\}$ ja $j[H] = \mathrm{P}(V) \setminus \mathrm{P}(U)$. Affiinin hypertason H näkökulmasta H uppoaa projektiiviseen avaruuteen $\mathrm{P}(V)$ niin, että pisteet v ja $j(v)$ voitaisiin samastaa. Tässä mielessä dimension määritelmä $\dim(\mathrm{P}(V)) = n - 1 = \dim(H)$ vaikuttaa oikeutetulta. Pisteet $\ell \in \mathrm{P}(U)$ eivät kuitenkaan ole koskaan muotoa $j(x)$ ja ℓ ei leikkaa lainkaan hypertasoa H. Koska ℓ kuitenkin on hypertason U suora, niin ℓ:n voidaan ajatella olevan kiinteästä pisteestä a suoran ℓ määräämässä suunnassa sijaitseva *äärettömyyspiste*.

Erikoinen piirre tässä tarkastelussa havaitaan, kun hypertason H annetaan vaihdella. Huomataan, että V:llä voi olla lukuisia hypertasoja, jotka kaikki uppoavat samaan projektiiviseen avaruuteen $\mathrm{P}(V)$. Jos kuitenkin $\dim(V) \geq 2$, niin kukin $\ell \in \mathrm{P}(V)$ on vuorollaan upotuskuva ja vuorollaan äärettömyyspiste. Ei siis ole mitään absoluuttista tapaa jakaa projektiivisen avaruuden pisteitä tavallisiksi, affiinin avaruuden pisteitä vastaaviksi pisteiksi, ja äärettömyyspisteiksi. Tällä kurssilla esitetty moderni projektiivisen avaruuden määritelmä ei tällaista jaottelua edellytäkään.

Lopuksi vielä huomataan, että vastaavanlainen tarkastelu voidaan tehdä mille tahansa V:n affiinille aliavaruudelle A, joka ei ole V:n vektorialiavaruus. Merkitään nimittäin jälleen U:lla A:n suunta-avaruutta sekä $W = \mathrm{sp}(A \cup U)$. Tällöin havaitaan, että A on W:n hypertaso, joten yo. tarkastelu voidaan toistaa vektoriavaruudessa W ja A uppoaa projektiiviseen avaruuteen $\mathrm{P}(W)$.

Homogeeniset koordinaatit

Kun V on äärellisulotteinen K-vektoriavaruus ja $n = \dim(V)$, niin lineaarialgebrasta tiedetään, että V on isomorfinen vektoriavaruuden K^n kanssa. Oletetaan nyt, että $V = K^n$ ja tarkastellaan koordinatisointia, minkä tämä mahdollistaa.

Olkoon $\ell \in \mathrm{P}(K^n)$. Tällöin $\ell = \mathrm{sp}(\{x\})$ jollakin $x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in K^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Tällöin merkitään

$$\ell = \mathrm{sp}(\{(x_0, \dots, x_{n-1})\}) = (x_0 : \dots : x_{n-1}).$$

Tätä esitystä kutsutaan projektiivisen pisteen ℓ esitykseksi *homogeenisten koordinaattien* avulla. Homogeenisuus viittaa siihen, ettei esitys tietenkään ole yksikäsitteinen, vaan jokaisella $\lambda \in K$ on voimassa

$$(x_0 : \dots : x_{n-1}) = (\lambda x_0 : \dots : \lambda x_{n-1}).$$

Koska homogeeniset koordinaatit eivät ole yksikäsitteisiä, ne voidaan valita eri tavoin. Yksi tapa on käyttää projektiivisen avaruuden $\mathrm{P}(K^n)$ suhdetta sopivasti kiinnitettyyn affiiniin hypertasoon hyväksi.

Esimerkki 3.4. Tarkastellaan projektiivista avaruutta $P = \mathrm{P}(\mathbb{R}^3)$ ja sen affiineja hypertasoja

$$A = \{\, (x, y, z) \mid z = 1 \,\} \text{ ja } B = \{\, (x, y, z) \mid x + y + z = 1 \,\}.$$

Olkoon $\ell = (a : b : c) \in P$.

1) Jos $c \neq 0$, niin pätee $(a/c, b/c, 1) \in \ell \cap A$. Siis projektiiviselle pisteelle ℓ on luontevaa valita homogeeniseksi koordinaattiesitykseksi tässä tapauksessa $\ell = (a : b : c) = (1/c)(a : b : c) = (a/c : b/c : 1)$. Jos sen sijaan $c = 0$, niin ℓ sisältyy A:n suunta-avaruuteen eli ℓ on A:lle äärettömyyspiste eikä tällaista kanonista esitystä ole.

2) Jos $s = a + b + c \neq 0$, niin hypertason B kannalta luontevin esitys projektiiviselle pisteelle ℓ on

$$\ell = (a/s : b/s : c/s).$$

Jos sen sijaan $s = 0$, niin ℓ on B:n kannalta äärettömyyspiste.

3.3 Projektiiviset suorat ja pisteet

Lause 3.5. *Olkoot ℓ ja m projektiivisen avaruuden $\mathrm{P}(V)$ eri pisteitä. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen projektiivinen suora $S \subseteq \mathrm{P}(V)$, joka kulkee projektiivisten pisteiden ℓ ja m kautta, ts. $\ell, m \in S$.*

Määritelmä 3.6. Olkoot X, Y projektiivisen avaruuden $\mathrm{P}(W)$ projektiivisia aliavaruuksia. Tällöin X:n ja Y:n *yhdysavaruus* on

$$X + Y = \mathrm{P}(U + V),$$

missä U ja V ovat vektoriavaruuden W aliavaruuksia, joille $X = \mathrm{P}(U)$ ja $Y = \mathrm{P}(V)$.

Esimerkki 3.7. Edellisen lauseen tilanteessa yksiöt $\{\ell\}$ ja $\{m\}$ ovat nollaulotteisia projektiivisia aliavaruuksia ja projektiivinen suora $S = \{\ell\} + \{m\}$ on niiden yhdysavaruus.

Pyritään todistamaan edelliselle lauseelle duaalinen tulos, jossa suoran ja pisteen roolit on vaihdettu. Tämä onnistuu projektiivisissa tasoissa.

Lause 3.8. *Olkoot X ja Y äärellisulotteisen projektiivisen avaruuden $\mathrm{P}(V)$ aliavaruuksia. Tällöin*

$$\dim(X + Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y).$$

Seuraus 3.9. *Olkoot L ja M projektiivisia suoria projektiivisessa tasossa $T = \mathrm{P}(W)$. Tällöin L ja M leikkaavat.*

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että $L \cap M = \emptyset$. Koska L ja M ovat projektiivisen avaruuden T projektiivisia suoria, niin $L = \mathrm{P}(U)$ ja $M = \mathrm{P}(V)$ joillakin vektoriavaruuden W aliavaruuksilla U ja V. Edellisen lauseen mukaan saadaan

$$\dim(L + M) = \dim(L) + \dim(M) - \dim(L \cap M) = 1 + 1 - \dim(\emptyset) = 2 - (-1) = 3.$$

Tämä on mahdotonta, sillä yhdysavaruus $L + M = \mathrm{P}(U) + \mathrm{P}(V) = \mathrm{P}(U + V)$ on toki tason T projektiivinen aliavaruus, ja siksi $\dim(L + M) \leq 2$. □

Projektiivisille tasoille esitetään usein seuraavat aksioomat:

PT1) Kahden projektiivisen pisteen kautta kulkee aina yksikäsitteinen projektiivinen suora.

PT2) Kaksi projektiivista suoraa leikkaa aina yksikäsitteisessä projektiivisessa pisteessä.

PT3) On olemassa neljä projektiivista pistettä, joista mitkään kolme eivät ole samalla suoralla.

Aksioomissa siis projektiivisen tason $\mathrm{P}(V)$ ajatellaan muodostavat rakenteen $(\mathrm{P}(V), \mathcal{S}, I)$, missä $\mathcal{S}$ on $\mathrm{P}(V)$:n projektiivisten suorien joukko ja I on ns. *insidenssirelaatio*:

$$I = \{(\ell, S) \in \mathrm{P}(V) \times \mathcal{S} \mid \ell \in S\}.$$

Ensimmäinen aksiooma on todennettu lauseessa 3.5 ja toinen seurauksessa 3.9. Tarkastetaan vielä kolmannenkin aksiooman pätevyys.

Lause 3.10. *Olkoon T projektiivinen taso. Tällöin on olemassa neljä pistettä, joista mitkään kolme eivät sijaitse samalla T:n projektiivisella suoralla.*

Esimerkki 3.11. Tarkastellaan kahden alkion kerroinkuntaa $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ vastaavia äärellisulotteisia projektiivisia avaruuksia. Tutkittavana on siis $\mathrm{P}(V)$, missä V on äärellisulotteinen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-vektoriavaruus. Merkitään myös $n = \dim(V) \in \mathbb{N}$. V:n projektiivisien pisteiden tiedetään olevan muotoa

$$\ell_a = \mathrm{sp}(\{a\}) = \{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\} = \{0 \cdot a, 1 \cdot a\} = \{\mathbf{0}, a\},$$

missä $a \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. Näiden lukumäärä on

$$|\mathrm{P}(V)| = |V| - 1 = 2^n - 1.$$

Projektiivista suoraa S puolestaan vastaa V:n kaksiulotteinen vektorialiavaruus U, ts. $S = \mathrm{P}(U)$. Yllä laskettu kaava pätee myös U:hun, joten $|S| = |\mathrm{P}(U)| = 2^2 - 1 = 3$. Pistepari (ℓ_a, ℓ_b) määrää aina projektiivisen suoran S, mutta mikä onkaan sen kolmas piste? Koska kyseinen suora on pisteiden ℓ_a ja ℓ_b yhdyssuora, saadaan yhdysavaruuden määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} S &= \{\ell_a\} + \{\ell_b\} = \mathrm{P}(\ell_a) + \mathrm{P}(\ell_b) = \mathrm{P}(\ell_a + \ell_b) = \mathrm{P}(\{\mathbf{0}, a\} + \{\mathbf{0}, b\}) \\ &= \mathrm{P}(\{\mathbf{0}, a, b, a + b\}) = \{\ell_a, \ell_b, \ell_{a+b}\}, \end{aligned}$$

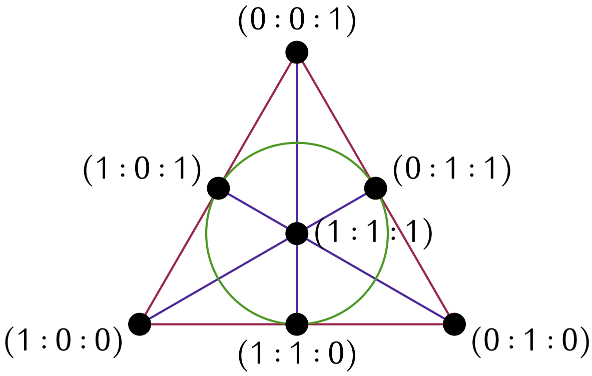
sillä ℓ_{a+b} on se yksikäsitteinen kolmas yksiulotteinen V:n aliavaruus, joka sisältyy joukkoon $\{\ell_a, \ell_b, \ell_{a+b}\}$. Pistepareja (ℓ_a, ℓ_b) on tietysti $\binom{2^n-1}{2}$ kappaletta, mutta koska suoraan sisältyy $\binom{3}{2} = 3$ pisteparia, niin projektiivisten suorien lukumäärä $\mathrm{P}(V)$:ssä on

$$\binom{2^n - 1}{2}/3.$$

Erikoistapauksena erityisen kiinnostava on ns. Fanon taso $F = \mathrm{P}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3)$ (italiaksi "Il piano di (Gino) Fano"). Huomattakoon, että todella $\dim(F) = \dim((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3) - 1 = 3 - 1 = 2$. Projektiivisten pisteiden lukumäärä on nyt

$$|F| = 2^3 - 1 = 7$$

ja suorien niinikään
$$\binom{2^3-1}{2}/3=\binom{7}{2}/3=(7\cdot 6)/(2\cdot 3)=7.$$
Kun Fanon tasolle piirretään esitys, näitä lukumääriä on hyvä käyttää sen tarkistamiseen, että kuva on oikein. Käytetään lisäksi homogeenisia koordinaatteja. Esimerkiksi pisteiden $(1:0:0)$ ja $(0:1:0)$ yhdyssuoran kolmas piste on $(1+0:0+1,0+0)=(1:1:0)$ sekä pisteiden $(1:1:0)$ ja $(1:0:1)$ yhdyssuoran $(1+1:1+0:0+1)=(0:1:1)$. Näin saadaan kannessakin komeillut kuva:



3.4 Projektiiviset kuvaukset

Määritelmä 3.12. Olkoot $(K,+,\cdot)$ kunta, U ja V K-vektoriavaruuksia ja $X=\mathrm{P}(U)$ ja $Y=\mathrm{P}(V)$ vastaavat projektiiviset vektoriavaruudet. Tällöin kuvauksen $f\colon X\to Y$ sanotaan olevan *projektiivinen*, jos on olemassa sellainen lineaarikuvaus $L\colon U\to V$, että jokaisella $x\in U$ pätee
$$f(\mathrm{sp}(\{x\}))=\mathrm{sp}(\{L(x)\}).$$
Kutsutaan tässä tilanteessa L:ää projektiivista kuvausta f *vastaavaksi* lineaarikuvaukseksi.

Lause 3.13. *Olkoon $f\colon X\to Y$ projektiivinen kuvaus ja $L\colon U\to V$ vastaavaksi lineaarikuvaukseksi. Tällöin:*

a) Kuvaukset f ja L ovat injektioita.

b) Jos Z on projektiivisen avaruuden X projektiivinen aliavaruus, niin $f[Z]$ on vastaavasti Y:n projektiivinen aliavaruus. Lisäksi $\dim(f[Z])=\dim(Z)$.

3.5 Desarguesin lause

Määritelmä 3.14. Projektiivisen avaruuden X pistekolmikkoa $\{a,b,c\}$ kutsutaan *(projektiiviseksi) kolmioksi*, jos pisteet a, b ja c eivät ole samalla suoralla. Tätä kolmiota merkitään $\triangle abc$. Kahden projektiivisen pisteen a ja b kautta kulkevaan suoraa merkitään $L(a,b)$:llä.

Lause 3.15 (Desarguesin lause)**.** *Olkoot* $\triangle pqr$ *ja* $\triangle p'q'r'$ *projektiivisen avaruuden* X *kolmioita, jotka näkyvät projektiisesta pisteestä* $s \in X$ *siinä mielessä perspektiivissä, että* $p' \in L(s,p)$*,* $q' \in L(s,q)$ *ja* $r' \in L(s,r)$*. Oletetaan, että kaikki tässä esiintyvät pisteet ovat eri pisteitä (7 pistettä kaikkiaan) ja että* $\dim(X) \geq 2$*. Tällöin* a*,* b *ja* c *ovat samalla suoralla, missä* $\{a\} = L(q,r) \cap L(q',r')$*,* $\{b\} = L(p,r) \cap L(p',r')$ *ja* $\{c\} = L(p,q) \cap L(p',q')$*.*