Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö

Kevät 2017

Geometria

Luennot: **Kerkko Luosto**
Muistiinpanot: **Jesse Railo (2013) sekä Jussi Klemetti ja Manu Harsu (2017)**

3 Sisätuloavaruudet

Edellisessä luvussa tarkasteltiin euklidisten avaruuksien affiinia geometriaa, ja todettiin, että affiinin geometrian ulkopuolelle jää merkittävä osa geometriasta, nimittäin kaikki, mikä liittyy etäisyyksiin ja kulmiin. Tässä luvussa tarkastellaan tätä affiinin geometrian ulkopuolelle jäävä teoriaa, ts. euklidisten avaruuksien metristä rakennetta. Käsitteellisesti tarkastelu tehdään yleisemmässä yhteydessä, koska oleellisinta on, että euklidinen avaruus on luonnollisella rakenteella varustettuna on sisätuloavaruus. Yleisen teorian kannalta on tämän vuoksi mielekästä käydä läpi metrisen avaruuden, normiavaruuden ja sisätuloavaruuden rakenteet. Tämän teorian läpikäyminen on sikälikin hyvin motivoitua, että nämä rakenteet esiintyvät kaikkialla matematiikassa ja muissakin yhteyksissä kuin euklidisten avaruuksien tilanteessa, joten geometrian vaikutus muuhun matematiikkaan tulee tältä osin ilmeiseksi.

3.1 Metriikasta sisätuloon

Määritelmä 3.1. Pari (X, d), missä $d\colon X \times X \to [0, \infty[$, on *metrinen avaruus*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $x, y, z \in X$:

1) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*metriikan kolmioepäyhtälö*),

2) $d(x, y) = d(y, x)$ ja

3) $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$.

Kuvausta d kutsutaan X:n *metriikaksi* tai *etäisyyskuvaukseksi*. Lukua $d(x, y)$ voidaan kutsua pisteiden x ja y *väliseksi etäisyydeksi* (metrisessä avaruudessa (X, d)).

Esimerkki 3.2. Keskeinen esimerkki metrisestä avaruudesta on tietenkin $(\mathbb{R}^n, d)$, missä d on euklidisen avaruuden standardi eli luonnollinen metriikka, missä pisteiden $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{n-1}), \mathbf{y} = (y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ välinen etäisyys on

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} (x_k - y_k)^2} = \sqrt{(x_0 - y_0)^2 + \dots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2}.$$

Monet tunnistavat tämän Pythogoraan lauseen avulla muodostetuksi lausekkeeksi, ja usean muuttujan analyysissä on epäsuorasti käyty läpi todistus, että d on $\mathbb{R}^n$:n metriikka. Tässä luvussa todistus tulee muodostettua uudestaan, sillä paljastuu, että euklidisen avaruuden metriikka on sisätulon määräämä.

Määritelmä 3.3. Olkoon E reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $\|\cdot\| : E \to [0, \infty[$ on avaruuden E *normi*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $x, y \in E$ ja $a \in \mathbb{R}$:

1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*normin kolmioepäyhtälö*),

2) $\|ax\| = |a| \|x\|$ ja

3) $\|x\| = 0$, jos ja vain jos $x = \mathbf{0}$.

Reaalista vektoriavaruutta E varustettuna sen normilla $\|\cdot\|$ kutsutaan *normiavaruudeksi*.

Normi liittyy yksinkertaisella tavalla metriikkaan:

Määritelmä 3.4. Olkoon E normiavaruus. Normiavaruuden E *normia* $\|.\|$ *vastaava metriikka* on kuvaus $d : E \times E \to [0, \infty[$,

$$d(x, y) = \|x - y\| .$$

Lause 3.5. *Normiavaruuden E normia $\|\cdot\|$ vastaava metriikka d on todella metriikka.*

Todistus. Olkoot $x, y, z \in E$. Käydään läpi metriikan ehdot.

1) Normin kolmioepäyhtälöstä seuraa metriikan kolmioepäyhtälö:

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

2) Metriikan symmetria seuraa normiin liittyvästä skaalausehdosta:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x).$$

3) Viimeisetkin metriikan ja normin ehdot vastaavat toisiaan:

$$d(x, y) \Leftrightarrow \|y - x\| = 0 \Leftrightarrow y - x = \mathbf{0} \Leftrightarrow y = x.$$

Siis normia vastaava metriikka d on metriikka. □

Määritelmä 3.6. Olkoon E reaalinen vektoriavaruus. Kuvaus $\cdot : E \times E \to \mathbb{R}$ on avaruuden E *sisätulo*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $x, y, z \in E$ ja $a \in \mathbb{R}$:

1) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$,

2) $(ax) \cdot y = a(x \cdot y)$,

3) $x \cdot y = y \cdot x$,

4) $x \cdot x \geq 0$ ja

5) $x \cdot x = 0$, jos ja vain jos $x = \mathbf{0}$.

Huomautus. Kolme ensimmäistä ehtoa kertovat, että sisätulo on *symmetrinen bilineaarinen muoto*. Bilineaarisuus sisältää itse asiassa ehtojen 1 ja 2 lisäksi myös vaatimuksen oikealta osittelevuudesta ja oikealta skaalautuvuudesta, mutta ne seuraa suoraan ehdoista 1 ja 3

$$x \cdot (y + z) = (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x = x \cdot y + x \cdot z$$

ja

$$x \cdot (ay) = (ay) \cdot x = a(y \cdot x) = a(x \cdot y).$$

Ehto 3 yksinään on tietenkin sisätulon symmetrisyys. Ehtojen 4–5 sisältö on, että tämä muoto on *positiivisesti definiitti*.

Sisätuloa vastaa normi, ja kun normia vastaa edelleen metriikka, voidaan jokainen sisätuloavaruus varustaa kanonisella tavalla metriikalla:

Määritelmä 3.7. Sisätuloavaruuden E *sisätuloa* $\cdot$ *vastaava normi* on kuvaus $\|\cdot\| : E \to [0, \infty[$,

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}.$$

Sisätuloa vastaavan normin varmistaminen normiksi on hieman vaikeampaa, kuin normia vastaavan metriikan todistaminen metriikaksi. Toki huomataan heti, että $\|\cdot\|$ on hyvin määritelty kuvaus, sillä sisätulon määritelmän neljäs ehto kertoo, että juurrettava on aina epänegatiivinen, mutta kolmioepäyhtälön osoittaminen vastaavalle normille on vaativahkoa ja vaatii Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälön tuekseen. Käydään läpi ensin helpot ehdot.

Lemma 3.8. *Olkoon E sisätuloavaruus, $\cdot$ sen sisätulo ja $\|\cdot\|$ sisätuloa vastaava normi. Tällöin $\|\cdot\|$ on hyvin määritelty kuvaus $E \to [0, \infty[$, joka toteuttaa normille asetetut ehdot 2 ja 3.*

Todistus. Olkoot $x \in E$ ja $a \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned} &2) \quad \|ax\| = \sqrt{(ax) \cdot (ax)} = \sqrt{a^2(x \cdot x)} = |a| \sqrt{x \cdot x} = |a| \|x\|, \\ &3) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x \cdot x} = 0 \Leftrightarrow x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

□

Lause 3.9 (Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälö)**.** *Olkoon E sisätuloavaruus, $\cdot$ sen sisätulo ja $\|\cdot\|$ sisätuloa vastaava normi. Tällöin jokaisella $x, y \in E$ pätee*

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|.$$

Todistus. Olkoot $x, y \in E$. Ensiksi havaitaan, että

$$\mathbf{0} \cdot y = (0 \cdot \mathbf{0}) \cdot y = 0(\mathbf{0} \cdot y) = 0 \leq 0 \cdot \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{0}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

ja sisätulon symmetrian vuoksi myös

$$x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot x = \|\mathbf{0}\| \|x\| = \|x\| \|\mathbf{0}\|.$$

Voidaan siis olettaa, että $x \neq \mathbf{0}$ ja $y \neq \mathbf{0}$, mistä seuraa normin kolmannen ehdon nojalla $\|x\| \neq 0$ ja $\|y\| \neq 0$. Tutkitaan, mitä pystytään osoittamaan vektorien x ja y lineaarikombinaatioista. Kun $t, u \in \mathbb{R}$, niin sisätulon bilineaarisuuden ja symmetrisyyden nojalla

$$\begin{aligned}(tx - uy) \cdot (tx - uy) &= (tx) \cdot (tx - uy) + (-uy) \cdot (tx - uy) \\ &= (tx) \cdot (tx) + (tx) \cdot (-uy) + (-uy) \cdot (tx) + (-uy) \cdot (-uy) \\ &= t^2(x \cdot x) - tu(x \cdot y) - ut(y \cdot x) + (-u)^2(y \cdot y) \\ &= t^2 \|x\|^2 - 2tu(x \cdot y) + u^2 \|y\|^2 .\end{aligned}$$

Sisätulon ehdon 4 nojalla siis

$$t^2 \|x\|^2 - 2tu(x \cdot y) + u^2 \|y\|^2 \geq (tx - uy) \cdot (tx - uy) \geq 0,$$

joten

$$2tu(x \cdot y) \leq t^2 \|x\|^2 + u^2 \|y\|^2 .$$

Valitaan nyt $t = \|y\|$ ja $u = \|x\|$, jolloin todistuksessa hyödynnetty lineaarikombinaatio on elegantin symmetrisesti $tx - uy = \|y\| x - \|x\| y$. Näillä valinnoilla saadaan epäyhtälö

$$2 \|y\| \|x\| (x \cdot y) \leq \|y\|^2 \|x\|^2 + \|x\|^2 \|y\|^2 = 2 \|x\|^2 \|y\|^2 ,$$

mistä supistuksen jälkeen seuraa (oletettiin $\|x\| \neq 0$ ja $\|y\| \neq 0$)

$$x \cdot y \leq \|x\| \|y\| .$$

Soveltamalla tätä epäyhtälö myös vektoriin $-x$ vektorin x sijasta saadaan myös

$$-x \cdot y \leq \|-x\| \|y\| = \|x\| \|y\| ,$$

sillä $\|-x\| = \sqrt{(-x) \cdot (-x)} = \sqrt{(-1)^2(x \cdot x)} = \sqrt{x \cdot x} = \|x\|$. Siis

$$|x \cdot y| = \max\{x \cdot y, -(x \cdot y)\} \leq \|x\| \|y\| .$$

□

Seuraus 3.10. *Sisätuloa vastaava normi on todellakin normi.*

Todistus. Olkoot $x, y \in E$. Aiemmin todettu, että sisätuloa vastaava normi toteuttaa normin ehdot 2 ja 3. Siis riittää tarkastaa kolmioepäyhtälö; Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) \\ &= x \cdot x + 2(x \cdot y) + y \cdot y \\ &= \|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Normin epänegatiivisuuden nojalla siis

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|,$$

mikä todistaa väitteen. □

Esimerkki 3.11. Nyt voidaan osoittaa, että euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen metriikka on todella metriikka.

Olkoot $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}), \mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots y_{n-1}), \mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ ja $a \in \mathbb{R}$. Osoitetaan aluksi, että pistetulo

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1}$$

on sisätulo.

$$\begin{aligned} 1) \quad (\mathbf{x}+\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} &= \big((x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) + (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})\big) \cdot (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) \\ &= (x_0 + y_0, x_1 + y_1, \dots, x_{n-1} + y_{n-1}) \cdot (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + y_i) z_i = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i z_i + y_i z_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} x_i z_i + \sum_{i=0}^{n-1} y_i z_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad (a\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} &= (ax_1, ax_2, \dots, ax_{n-1}) \cdot (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (ax_i) y_i = a \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i = a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}), \end{aligned}$$

$$3) \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i = \sum_{i=0}^{n-1} y_i x_i = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x},$$

$$4) \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i x_i = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 \ge 0,$$

$$\begin{aligned} 5) \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_i = 0 \text{ jokaisella } i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Siis pistetulo on sisätulo, joten sitä vastaava normi, vektorin *itseisarvo*, on

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2}$$

Tätä normia vastaava metriikka on

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i - y_i)^2},$$

eli luonnollinen metriikka.

Lause 3.12 (Suunnikassääntö)**.** *Sisätuloavaruudessa E on voimassa*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

kun $x, y \in E$.

Todistus. Olkoot $x, y \in E$. Nyt

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) + (x - y) \cdot (x - y) \\
&= x \cdot x + 2(x \cdot y) + y \cdot y + x \cdot x - 2(x \cdot y) + y \cdot y \\
&= 2(x \cdot x) + 2(y \cdot y) \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.
\end{aligned}$$

□

3.2 Välissäolo sisätuloavaruuksissa

Sisätuloavaruudet ovat erityisesti reaalisia vektoriavaruuksia, joten niissä on käytettävissä koko affiinin geometrian koneisto. Palautetaan mieleen välissäolorelaatio.

$$B(a, b, c) \iff \text{ on olemassa } t \in [0, 1], \text{ jolle } b = ta + (1 - t)c,$$

missä $a, b, c \in E$.

Lemma 3.13. *Olkoon E normiavaruus ja d normia vastaava metriikka. Tällöin jos pisteillä $a, b, c \in E$ pätee $B(a, b, c)$, niin*

$$d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$$

Todistus. Olkoot $a, b, c \in E$ siten, että $B(a, b, c)$. Siis välissäolon määritelmän nojalla on olemassa $t \in [0, 1]$, jolla $b = ta + (1 - t)c$. Nyt saadaan

$$\begin{aligned}
d(a, b) + d(b, c) &= \|a - b\| + \|b - c\| \\
&= \|a - (ta + (1 - t)c)\| + \|(ta + (1 - t)c) - c\| \\
&= \|(1 - t)a - (1 - t)c\| + \|ta + c - tc - c\| \\
&= \|(1 - t)(a - c)\| + \|t(a - c)\| \\
&= |1 - t|\,\|a - c\| + |t|\,\|a - c\| \\
&= (1 - t)\,\|a - c\| + t\,\|a - c\| \qquad |\ 0 \le t \le 1 \\
&= \|a - c\| \\
&= d(a, c).
\end{aligned}$$

□

Määritelmä 3.14. Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $x, y \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. Tällöin vektorien x ja y sanotaan olevan *yhdensuuntaiset*, jos $\ell(\mathbf{0}, x) \parallel \ell(\mathbf{0}, y)$ eli jollakin $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$ pätee $x = \lambda y$, mitä merkitään $x \parallel y$.

Vektorien x ja y sanotaan olevan *samansuuntaiset*, jos on olemassa $\lambda > 0$, jolla $x = \lambda y$. Vektorien x ja y samansuuntaisuutta merkitään $x \uparrow\uparrow y$. Vektorit x ja y ovat *vastakkaissuuntaiset*, jos on olemassa $\lambda < 0$, jolla $x = \lambda y$, mitä merkitään $x \uparrow\downarrow y$.

Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälöön saadaan seuraava lisäys.

Lause 3.15. *Olkoon V sisätuloavaruus. Tällöin kaikille $x, y \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ pätee*

1) $x \cdot y = \|x\| \|y\| \iff x \uparrow\uparrow y$ *ja*

2) $|x \cdot y| = \|x\| \|y\| \iff x \parallel y$.

Todistus. Olkoot $x, y \in E$.

1) Oletetaan ensin, että $x \uparrow\uparrow y$. Siis on olemassa $\lambda > 0$, jolla $y = \lambda x$. Tällöin saadaan

$$x \cdot y = x \cdot (\lambda x) = \lambda(x \cdot x) = \lambda \|x\|^2 = (|\lambda| \|x\|) \|x\| = \|x\| \|\lambda x\| = \|x\| \|y\| .$$

Oletetaan sitten, että $x \cdot y = \|x\| \|y\|$. Merkitään, että $v = \|y\| x - \|x\| y$. Tällöin

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= v \cdot v = (\|y\| x - \|x\| y) \cdot (\|y\| x - \|x\| y) \\ &= \|y\|^2 (x \cdot x) - 2 \|x\| \|y\| (x \cdot y) + \|x\|^2 (y \cdot y) \\ &\overset{\text{ol.}}{=} \|y\|^2 \|x\|^2 - 2 \|x\| \|y\| \|x\| \|y\| + \|x\|^2 \|y\|^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} & \|v\| = 0 \\ \implies\quad & v = \|y\| x - \|x\| y = \mathbf{0} \\ \implies\quad & \|y\| x = \|x\| y \\ \implies\quad & y = \underbrace{\frac{\|y\|}{\|x\|}}_{>0} x \quad (x, y \neq \mathbf{0}) \end{aligned}$$

Siis $x \uparrow\uparrow y$.

2) Oletetaan ensin, että $x \parallel y$. Siis $x \uparrow\uparrow y$ tai $x \uparrow\downarrow y$. Ensimmäisessä tapauksessa

$$|x \cdot y| = |\|x\| \|y\|| = \|x\| \|y\| .$$

Jälkimmäisessä tapauksessa $x \uparrow\uparrow -y$, joten

$$|x \cdot y| = |x \cdot (-y)| = \|x\| \|-y\| = \|x\| \|y\| .$$

Siis molemmissa tapauksissa $|x \cdot y| = \|x\| \, \|y\|$.

Oletetaan sitten, että $|x \cdot y| = \|x\| \, \|y\|$. Siis joko $x \cdot y = \|y\| \, \|y\|$ tai $(-x) \cdot y = \|x\| \, \|y\| = \|-x\| \, \|y\|$. Ensimmäisessä tapauksessa $x \uparrow\uparrow y$ ja jälkimmäisessä tapauksessa $-x \uparrow\uparrow y$ eli $x \uparrow\downarrow y$. Siis $x \parallel y$. □

Lause 3.16 (Välissäolon metrinen karakterisointi). *Olkoon E sisätuloavaruus. Tällöin kaikille $x, y, z \in E$ pätee*

$$B(x, y, z) \iff d(x, y) + d(y, z) = d(x, z),$$

missä d on sisätuloavaruuden E sisätuloa vastaava metriikka ja B on välissäolorelaatio.

Todistus. Implikaatio " $\Longrightarrow$ " on jo todistettu normiavaruuksille.

Olkoot $x, y, z \in E$, joilla $d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)$. Yhtäpitävästi pätee siis

$$\|x - y\| + \|y - z\| = \|x - z\| .$$

Merkitään $u = x - y$ ja $v = y - z$, jolloin

$$\|u\| + \|v\| = \|u + v\| .$$

Korottamalla toiseen potenssiin saadaan

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 + 2\|u\| \, \|v\| + \|v\|^2 &= (\|u\| + \|v\|)^2 \\
&= \|u + v\|^2 \\
&= (u + v) \cdot (u + v) \\
&= u \cdot u + 2(u \cdot v) + v \cdot v \\
&= \|u\|^2 + 2(u \cdot v) + \|v\|^2
\end{aligned}$$

Siis $2\|u\| \, \|v\| = 2(u \cdot v)$ eli $\|u\| \, \|v\| = u \cdot v$, joten Cauchy ja Schwarzin epäyhtälön nojalla $u \uparrow\uparrow v$ tai $u = \mathbf{0}$ tai $v = \mathbf{0}$.

Jos $u = \mathbf{0}$, niin $y = x$, jolloin $B(x, x, z)$. Siis $B(x, y, z)$ on voimassa.

Jos $v = \mathbf{0}$, niin $z = y$, jolloin $B(x, z, z)$. Siis $B(x, y, z)$ on voimassa.

Voidaan siis olettaa, että $u, v \neq \mathbf{0}$, jolloin $u \uparrow\uparrow v$. Valitaan $\lambda > 0$, jolle $v = \lambda u$. Tällöin

$$\begin{aligned}
& y - z = \lambda(x - y) \\
\iff & z + \lambda x = (\lambda + 1)y \\
\iff & y = \frac{\lambda}{\lambda + 1}x + \frac{1}{\lambda + 1}z
\end{aligned}$$

Saadussa yhtälössä skalaarikertoimille pätee $\lambda/(\lambda + 1) + 1/(\lambda + 1) = 1$ ja ehdosta $\lambda > 0$ seuraa $\lambda + 1 > 1$ ja $0 < 1/(\lambda + 1) < 1$, joten $B(x, y, z)$. □

Harjoituksissa huomattiin, että äärellisulotteisen vektoriavaruuden V hypertaso H jakaa $V \smallsetminus H$:n luonnollisella tavalla kahteen osaan: Jos U on H:n suunta-avaruus ja $v \in V \smallsetminus U$, niin ne ovat

$$S_+ = \{y + \lambda v \mid y \in H, \lambda > 0\},$$
$$S_- = \{y + \lambda v \mid y \in H, \lambda < 0\}.$$

Määritelmä 3.17. Olkoon V äärellisulotteinen reaalinen vektoriavaruus. Joukkoa $S \subseteq V$ kutsutaan *puoliavaruudeksi*, jos on olemassa V:n hypertaso H ja $v \in V \smallsetminus U$, missä U on H:n suunta-avaruus, joiden avulla S voidaan esittää muodossa

$$S = \{y + \lambda v \mid y \in H, \lambda \geq 0\}.$$

Hypertasoa H kutsutaan puoliavaruuden S *reunaksi*. Tason puoliavaruutta kutsutaan *puolitasoksi* ja suoran puoliavaruutta kutsutaan *puolisuoraksi*.

Puolitason reunaa kutsutaan sen *reunasuoraksi* ja puolisuoran reunaa taas sen *alkupisteeksi*.

Purkamalla määritelmiä todetaan, että V:n puolisuora on aina muotoa

$$s = \{a + tu \mid t \geq 0\},$$

missä a on s:n alkupiste ja $u \in V \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$.

Puolitasolle Λ saadaan vastaavanlainen esitys

$$\Lambda = \{a + \lambda u + \mu v \mid \lambda \in \mathbb{R}, \mu \geq 0\}.$$

3.3 Kulmat

Määritelmä 3.18. Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $S \subseteq V$. Joukon S *kupera verho* (eng. convex hull) on joukon S kaikkien kuperien kombinaatioiden joukko ts. joukko

$$\text{hull}(S) = \left\{ \sum_{a \in S_0} t_a a \;\middle|\; S_0 \subseteq S \text{ äärellinen }, t_a \geq 0 \text{ ja } \sum_{a \in S_0} t_a = 1 \right\}$$

Lause 3.19. *Kun V on reaalinen vektoriavaruus ja $S \subseteq V$, niin $S \subseteq hull(S)$, $hull(S)$ on kupera ja $hull(S)$ on suppein kupera joukko, jolla on nämä ominaisuudet.*

Määritelmä 3.20. Olkoon V reaalinen vektoriavaruus. Vektoriavaruuden V *kulmat* syntyvät eri tavoilla

1. Olkoot s ja s' samasta pisteestä p lähteviä eri puolisuoria, joiden yhdiste ei ole suora. Tällöin *kylkien s ja s' sisälle jäävä kulma* on $\text{hull}(S)$.

   Kylkien s ja s' ulkopuolelle jäävä kulma on $(T \smallsetminus \text{hull}(s \cup s')) \cup s \cup s'$, missä T on se yksikäsitteinen taso, jolle $s, s' \subseteq T$. Pistettä p kutsutaan kulman *kärjeksi*.

2. Puolisuorat ovat vektoriavaruuden V *nollakulmia*.

   Tasot ovat vektoriavaruuden V *täysiä kulmia*.

   Puolisuoran tapauksessa puolisuoria s ja s' sanotaan olevan kulman *kylkiä* ja puolisuoran alkupiste on sen *kärki*.

   Täyden kulman tapauksessa mielivaltainen tason T piste kelpaa sen kärjeksi ja siitä lähtevä T:n puolisuora kyljeksi.

3. Vektoriavaruuden V puolitasot ovat *oikokulmia*.

   Jos Γ on vektoriavaruuden V puolitaso, niin sen reunasuoran ℓ mitä tahansa pistettä p voidaan kutsua Γ:n kärjeksi. Piste p jakaa suran ℓ kahdeksi puolisuoraksi, joita kutsutaan Γ:n kyljiksi.

Näitä kaikkia kutsutaan vektoriavaruuden V *kulmiksi*.

Merkintöjä. *Olkoon V reaalinen vektoriavaruus ja $p, a, b \in V$ sen kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla. Tällöin*

$$s = \{p + t(a - p) \mid t \geq 0\}$$
$$s' = \{p + t(b - p) \mid t \geq 0\}$$

ovat sen puolisuoria.

Merkitään $\Gamma(a, p, b)$:llä kylkien s ja s' sisään jäävää kulmaa.

Määritelmä 3.21. Olkoon E sisätuloavaruus ja Γ sen kulma. Kulman Γ *suuruus* määritellään eri tapauksissa seuraavasti.

1) Nollakulman suuruus on 0, oikokulman suuruus on π ja täyden kulman suuruus on 2π.

2) Oletetaan sitten, että Γ on kylkien s ja s' sisälle jäävä kulma ts. s ja s' ovat pisteestä p alkavia puolisuoria ja $s \cup s'$ ei ole suora. Valitaan $a \in s \setminus \{p\}$ ja $b \in s' \setminus \{p\}$. Tällöin kulman Γ suuruus on

$$\measuredangle(a, p, b) = \arccos \frac{(a - p) \cdot (b - p)}{\|a - p\| \, \|b - p\|}$$

3) Kylkien s ja s' ulkopuolelle jäävän kulman Γ suuruus on vastaavasti $2\pi - \alpha$, missä α on kylkien s ja s' sisään jäävä kulma.

Huomautus. Lausekkeen

$$\arccos \frac{(a - p) \cdot (b - p)}{\|a - p\| \, \|b - p\|}$$

arvo ei riipu pisteiden a ja b valinnasta. Lisäksi Cauchy ja Schwarzin epäyhtälön nojalla kulman suuruus on hyvinmääritelty.

Määritelmä 3.22. Kulman Γ on *suora*, jos sen suuruus on $\pi/2$.

Huomautus. Jos $\Gamma = \Gamma(a, p, b)$, niin se on suora, jos ja vain jos

$$\begin{aligned} &\arccos \frac{(a-p)\cdot(b-p)}{\|a-p\|\,\|b-p\|} = \frac{\pi}{2} \\ \iff &\frac{(a-p)\cdot(b-p)}{\|a-p\|\,\|b-p\|} = 0 \\ \iff &(a-p)\cdot(b-p) = 0. \end{aligned}$$

Määritelmä 3.23. Reaalisen vektoriavaruuden V vektorit a ja b ovat keskenään *kohtisuorassa*, $a \perp b$, jos $\measuredangle(a, \mathbf{0}, b) = \pi/2$ eli $a \cdot b = 0$ $(a, b \neq \mathbf{0})$.

Lemma 3.24. *Olkoon Γ kylkien s ja s' sisään jäävä kulma vektoriavaruudessa V. Tällöin Γ ei sisällä yhtään V:n suoraa (kokonaisuudessaan).*

Todistus. Olkoon ℓ vektoriavaruuden V suora. Merkitään kulman Γ kärkeä a:lla. Valitaan $u, v \in V$ niin, että

$$\begin{aligned} s &= \{a + tu \mid t \geq 0\} \text{ ja} \\ s' &= \{a + tv \mid t \geq 0\}. \end{aligned}$$

Tällöin $\{u, v\}$ virittävät suunta-avaruuden sellaiselle tasolle T, jossa Γ sijaitsee.

Voidaan olettaa, että $\ell \subseteq T$ ja että kulmalla Γ ja suoralla ℓ on yhteinen piste b. Harjoituksissa todettiin, että

$$\Gamma = \{a + \lambda u + \mu v \mid \lambda \geq 0, \mu \geq 0\}$$

Erityisesti $b \in \ell \cap \Gamma$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$b = a + \lambda_0 u + \mu_0 v,$$

missä $\lambda_0 \geq 0$ ja $\mu_0 \geq 0$.

Toisaalta $\ell = b + \langle w \rangle$ jollakin $w \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$. Koska ℓ on tasossa T, niin w on T:n suunta-avaruudessa eli

$$w = \lambda u + \mu v$$

joillakin $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Siis jokainen $x \in \ell$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} x &= b + tw \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ &= a + \lambda_0 u + \mu_0 v + t\lambda u + t\mu v \\ &= a + (\lambda_0 + t\lambda)u + (\mu_0 + t\mu)v \end{aligned}$$

Koska $w \neq \mathbf{0}$, niin $\lambda \neq 0$ tai $\mu \neq 0$. Voidaan olettaa, että $\lambda > 0$.

Valitaan $t = -\frac{\lambda_0}{\lambda} - 1$. Nyt

$$\begin{aligned} x &= a + (\lambda_0 + (-\frac{\lambda_0}{\lambda} - 1)\lambda)u + \mu^* v \\ &= a + (\lambda_0 + (-\lambda_0 - \lambda))u + \mu^* v \\ &= a - \lambda u + \mu^* v, \end{aligned}$$

missä $\mu^* = \mu_0 + t\mu = \mu_0 + (-\frac{\lambda_0}{\lambda} - 1)\mu$.

Koska $-\lambda < 0$ eli u:n kerroin on negatiivinen, niin $x \in \ell \setminus \Gamma$. (Tässä käytetään hyväksi myös sitä, että esitys $a + \lambda u + \mu v$ on yksikäsitteinen, koska $\{u, v\}$ on vapaa.)

Siis $\ell \nsubseteq \Gamma$. □

Lemma 3.25. *Olkoon Γ kylkien s ja s' sisään jäävä kulma sisätuloavaruudessa E. Tällöin siis s ja s' ovat samasta pisteestä p lähteviä puolisuoria, joille $s \cup s'$ ei ole suora. Tässä tilanteessa kulman Γ suuruudelle γ pätee $0 < \gamma < \pi$.*

Vastaavasti jos Δ jää kylkien s ja s' ulkopuolelle, niin $\pi < \delta < 2\pi$, missä δ on kulman Δ suuruus.

Todistus. Valitaan $a \in s \setminus \{p\}$ ja $b \in s' \setminus \{p\}$, jolloin

$$\gamma = \arccos \frac{(a-p)\cdot(b-p)}{\|a-p\|\,\|b-p\|}$$

Suoraan arkuskosinin määritelmästä seuraa, että $0 \le \gamma \le \pi$.

Toisaalta kun $u, v \in E \setminus \{\mathbf{0}\}$, niin

$$\begin{aligned} &\arccos \frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|} \in \{0, \pi\} \\ \iff &\frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|} \in \{-1, 1\} \\ \iff &|u \cdot v| = \|u\|\,\|v\| \\ \overset{\text{CS}}{\iff} &u \parallel v. \end{aligned}$$

Koska $s \neq s'$ ja $s \cup s'$ ei ole suora, niin $a - p \nparallel b - p$, joten $\gamma \notin \{0, \pi\}$. Siis $0 < \gamma < \pi$.

Kulmalle Δ saadaan nyt määritelmästä $\delta = 2\pi - \gamma$, joten

$$\pi = 2\pi - \pi < \delta < 2\pi - 0 = 2\pi.$$

□

Lause 3.26. *Olkoot Γ ja Δ sisätuloavaruuden E kulmia, joille $\Gamma \subseteq \Delta$. Tällöin $\gamma \le \delta$, missä γ on kulman Γ suuruus ja δ on kulman Δ suuruus.*

Todistus. (Hahmotelma)
Kulmat putoavat viiteen kategoriaan, jotka ovat suuruusjärjestyksessä:

nollakulmat, kylkien sisälle jäävät kulmat, oikokulmat,
kylkien ulkopuolelle jäävät kulmat ja täydet kulmat

1) Jos Γ on nolla kulma tai Δ on täysikulma, niin väite on triviaalisti tosi.

   Jos Δ on nollakulma tai Γ on täysikulma, niin ehdosta $\Gamma \subseteq \Delta$ seuraa, että $\Gamma = \Delta$, joten $\gamma = \delta$.

2) Oletetaan siis, että kumpikaan kulmista Γ ja Δ ei ole nollakulma tai täysikulma.

   Jos Γ on oikokulma eli puolitaso niin se sisältää reunasuoransa. Kylkien sisään jäävä kulma ei sisällä suoria, joten Δ on oikokulma tai kylkien ulkopuolelle jäävä kulma. Molemmissa tapauksessa $\gamma = \pi \leq \delta$.

   Komplementoimalla tarkastelu saadaan vastaavasti, että jos Δ on oikokulma, niin $\gamma \leq \pi = \delta$.

3) Jäljelle jää tapaus, jossa Γ ja Δ ovat kylkien sisälle tai ulkopuolelle jääviä kulmia.

   Jos Γ on kylkien ulkopuolelle jäävä kulma, niin se sisältää suoran, joten Δ on myös kylkien ulkopuolelle jäävä kulma.

   Jos Γ on kylkien sisäpuolelle ja Δ ulkopuolelle jäävä kulma, niin $\gamma < \pi < \delta$.

4) Sisäpuolelle jäävien kulmien vertailu palautuu arkuskosinin ominaisuuksiin.

   Komplementoimalla saadaan käsiteltyä ulkopuolelle jäävien kulmien vertailu.

□

Määritelmä 3.27. Vektoriavaruuden V kulmat Γ ja Γ' ovat *vierekkäiset*, jos Γ ja Γ' ovat samassa tasossa ja $\Gamma \cap \Gamma' = s$, missä sekä Γ:n että Γ':n kylki ts. Γ ja Γ' leikkaavat täsmälleen yhteisessä kyljessä.

Lause 3.28. *Olkoon Γ ja Γ' sisätuloavaruuden E vierekkäiset kulmat, joiden suuruudet ovat γ ja γ'. Tällöin $\Delta = \Gamma \cup \Gamma'$ on kulma, jonka suuruus on $\delta = \gamma + \gamma'$.*

Todistus. (Ydinkohdat)
Todistus jakautuu useaan tapaukseen sen mukaan, minkä tyyppisiä kulmat ovat. Esimerkiksi jos Γ tai Γ' on nollakulma, niin tilanne trivialisoituu, jos taas Γ tai Γ' on täysikulma, niin toinen kulmista on nollakulma.

Katsotaan tarkemmin seuraavaa tapausta:
Γ on kylkien s ja s_0 sekä Γ' on kylkien s ja s_1 sisään jäävä kulma. Oletetaan lisäksi, että Δ jää kylkien s_0 ja s_1 sisälle.

Olkoon p kulmien yhteinen kärki. Valitaan suunta u niin, että $\|u\| = 1$ ja $s = \{p + tu \mid t \geq 0\}$. Lisäksi kaikki kulmat ovat samassa tasossa T, jolle valitaan ortonormaali kanta $\{u, v\}$ (HT).

Tällöin

$$
\begin{aligned}
s_0 &= \{p + t(\lambda_0 u + \mu_0 v) \mid t \geq 0\} \\
s_1 &= \{p + t(\lambda_1 u + \mu_1 v) \mid t \geq 0\},
\end{aligned}
$$

missä kertoimet voidaan valita niin, että $\|\lambda_0 u + \mu_0 v\| = 1$, $\|\lambda_1 u + \mu_1 v\| = 1$ ja sopivalla v:n suunnan valinnalla $\mu_0 > 0$.

Merkitään $a = p + \lambda_0 u + \mu_0 v$ ja $b = p + \lambda_1 u + \mu_1 v$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \arccos \frac{(p + \lambda_0 u + \mu_0 v - p) \cdot (p + u - p)}{\|p + \lambda_0 u + \mu_0 v - p\| \, \|p + u - p\|} \\
&= \arccos \frac{(\lambda_0 u + \mu_0 v) \cdot u}{\|\lambda_0 u + \mu_0 v\| \, \|u\|} \\
&= \arccos \frac{\lambda_0 (u \cdot u) + \mu_0 (v \cdot u)}{1 \cdot 1} \\
&= \arccos \frac{\lambda_0 \cdot 1 + \mu_0 \cdot 0}{1} \\
&= \arccos \lambda_0
\end{aligned}
$$

Siis $\lambda_0 = \cos \gamma$.

Koska $\|\lambda_0 u + \mu_0 v\| = 1$ eli $\lambda_0^2 + \mu_0^2 = 1$ ja $\mu_0 > 0$, niin $\mu_0 = \sin \gamma$. Siis

$$
a = p + \lambda_0 u + \mu_0 v = p + (\cos \gamma) u + (\sin \gamma) v.
$$

Vastaavasti

$$
b = p + (\cos \gamma') u - (\sin \gamma') v,
$$

sillä Γ:lla ja Γ':lla ei ole kyljen lisäksi yhteisiä pisteitä.

Kulman Δ suuruudeksi saadaan siis

$$
\begin{aligned}
\delta &= \arccos \frac{(a - p) \cdot (b - p)}{\|a - p\| \, \|b - p\|} \\
&= \arccos \frac{((\cos \gamma) u + (\sin \gamma) v) \cdot ((\cos \gamma') u - (\sin \gamma') v)}{1 \cdot 1} \\
&\overset{u \cdot v = 0}{=} \arccos(\cos \gamma \cos \gamma' - \sin \gamma \sin \gamma') \\
&= \arccos(\cos(\gamma + \gamma')) \overset{\substack{\delta < \pi \\ \gamma + \gamma' < \pi}}{=} \gamma + \gamma'
\end{aligned}
$$

□