Tampereen yliopisto

Joukko-oppi
Harjoitus 1 (28. 8.)
Syksy 2023

Nämä ovat esitietoharjoitukset, joiden ratkomiseen riittävät kandidaatintutkinnossa opitut tiedot ja taidot.

1. Osoita, että joukko-opillinen kuulumisrelaatio $\in$ ja sisältyvyysrelaatio $\subseteq$ ovat seuraavassa mielessä täysin riippumattomia toisistaan: Esitä esimerkit joukoista a, b, c ja d sekä A, B, C ja D, joille

$$\begin{aligned}
&a \in A \text{ ja } a \subseteq A,\\
&b \in B \text{ ja } b \nsubseteq B,\\
&c \notin C \text{ ja } c \subseteq C \text{ sekä}\\
&d \notin D \text{ ja } d \nsubseteq D.
\end{aligned}$$

2. Oletetaan, että A, B ja C ovat eri joukkoja. Todista, että on olemassa sellainen korkeintaan kolmialkioinen joukko D, että $A \cap D$, $B \cap D$ ja $C \cap D$ ovat eri joukkoja.

3. Olkoot A, B ja C joukkoja, joilla $A \cup B = A \cup C$ ja $A \cap B = A \cap C$. Osoita, että $B = C$.

4. Milloin $A \smallsetminus B = B \smallsetminus A$ on voimassa? Esitä esimerkki joukoista A, B ja C, joilla

$$A \smallsetminus (B \smallsetminus C) \neq (A \smallsetminus B) \smallsetminus C.$$

5. Olkoon $A = \{\{a, b\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{a, \{b\}\}, \{\{a\}, b\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{a\}, \{b\}\}$. Määritä joukko $\bigcup A$. Mikä on A, jos $a = b$? Entä jos $a = \{b\}$?

6. Ratkaise joukko-opillinen yhtälö

$$\left\{\mathcal{P}(x), \bigcup x\right\} = \{y, \emptyset\}.$$