Tampereen yliopisto

Joukko-oppi
Harjoitus 10 (6. 11.)
Syksy 2023

1. Etsi sisältyvyyden suhteen minimaaliset transitiiviset joukot S ja T, joilla $(2,1) \in S$ ja $(2,1) \subseteq T$.

2. Olkoon a joukko.
a) Osoita, että jos a on transitiivinen, niin myös $a^+ = a \cup \{a\}$ on transitiivinen.
b) Osoita, että a on transitiivinen, jos ja vain jos $\mathcal{P}(a)$ on transitiivinen.

3.
a) Esitä esimerkki transitiivisesta relaatiosta, joka ei ole joukkona transitiivinen.
b) Esitä esimerkki transitiivisesta joukosta, joka ei ole edes relaatio.

Luentojen mukaan joukon A relaatio S on *joukon A tiukka lineaarijärjestys*, jos on olemassa sellainen joukon A lineaarijärjestys R, että $S = R \smallsetminus (\mathrm{id}_A)$. Vastaavasti S on *joukon A tiukka (osittainen) järjestys*, jos on olemassa sellainen joukon A osittainen järjestys R, että $S = R \smallsetminus (\mathrm{id}_A)$.

4. Olkoon R joukon A relaatio. Todista, että R on joukon A tiukka osittainen järjestys, jos ja vain jos R on transitiivinen ja irrefleksiivinen.

5. Olkoon R joukon A relaatio. Osoita, että R on joukon A tiukka lineaarijärjestys täsmälleen silloin, kun seuraavat ehdot pätevät:
a) R on transitiivinen,
b) R toteuttaa trikotomian A:ssa: kaikilla $x, y \in A$ pätee tasan yksi ehdoista

$$xRy, \qquad yRx, \qquad x = y.$$

6. Olkoon n luonnollinen luku, $(A, \leq)$ lineaarijärjestetty joukko ja $f \colon n^+ \to A$ kuvaus. Osoita, että joukossa $\mathrm{ran}(f)$ on suurin alkio.