Tampereen yliopisto

Joukko-oppi
Harjoitus 11 (13. 11.)
Syksy 2023

1. Olkoon A äärellinen joukko, ja olkoon $f\colon A \to A$ kuvaus. Osoita, että f on injektio, jos ja vain jos se on surjektio.

2. Olkoon $\mathcal{A}$ äärellinen perhe äärellisiä joukkoja. Osoita, että myös $\bigcup \mathcal{A}$ on äärellinen.

3. Olkoon R joukon A tiukka lineaarijärjestys. Osoita, että A on äärellinen, jos ja vain jos sekä R että R^{-1} ovat joukon A hyviä järjestyksiä.

4. Olkoon $\leq$ joukon A osittainen järjestys. Tarkastellaan funktiota $F : A \to \mathcal{P}(A)$,

$$F(a) = \{x \in A \mid x \leq a\}.$$

Olkoon $S = \mathrm{ran}(F)$. Osoita, että F on rakenteiden $(A, \leq)$ ja $(S, \subseteq)$ välinen isomorfismi. [Merkinnässä $(S, \subseteq)$ sisältyvyys ajatellaan luonnollisesti rajoitetuksi joukkoon S.]

5. Olkoot K, L ja M joukkoja. Osoita, että seuraavat yhtämahtavuudet pätevät:
a) Jos L ja M ovat erillisiä, niin $K \times (L \cup M) \approx (K \times L) \cup (K \times M)$.
b) ${}^{M}(K \times L) \approx {}^{M}K \times {}^{M}L$.

6. Olkoon H funktio, jolla $\mathrm{dom}(H) = I$ on äärellinen, ja $H(i) \neq \emptyset$ jokaisella $i \in I$. Osoita käyttämättä valinta-aksioomaa, että on olemassa funktio f, jolla $\mathrm{dom}(f) = I$, ja $f(i) \in H(i)$ jokaisella $i \in I$. [Käytä induktiota luvun $\mathrm{card}(I)$ suhteen.]