Tampereen yliopisto

Joukko-oppi
Harjoitus 12 (20. 11.)
Syksy 2023

1. Merkitään $\aleph_0 = \mathrm{card}(\omega)$. Osoita seuraavat väittämät todeksi:
a) $\aleph_0 \oplus 5 = \aleph_0$.
b) $\aleph_0 \oplus \aleph_0 = \aleph_0$.
c) $\aleph_0 \otimes \aleph_0 = \aleph_0$.

2. Olkoot κ, λ ja μ kardinaaleja. Osoita, että ehdosta $\kappa < \lambda$ ei seuraa, että
a) $\kappa \oplus \mu < \lambda \oplus \mu$
b) $\kappa \otimes \mu < \lambda \otimes \mu$.

3. Kun A on joukko, kutsutaan mitä tahansa kuvausta $f\colon n \to A$, missä $n \in \omega$, *jonoksi* joukon A alkioita. Merkitään $\mathrm{Sq}(A)$:lla joukon A kaikkien jonojen joukkoa. Osoita, että $\mathrm{Sq}(\omega) \approx \omega$.

4. Osoita edellisen tehtävän avulla, että algebrallisten lukujen joukko $\mathcal{A}$ on numeroituva. Miten tästä päätellään, että transkendenttilukujen joukko $\mathcal{T}$ on ylinumeroituva? (Reaaliluku a on *algebrallinen*, eli $a \in \mathcal{A}$, jos se on jonkin kokonaislukukertoimisen polynomin nollakohta. Reaaliluku on puolestaan *transkendenttinen*, jos se ei ole algebrallinen. Oletetaan tunnetuksi, että $\mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\omega)$.)

5. Olkoon A joukko, jolla $\mathrm{card}(A) \geq 2$. Osoita, että $\mathrm{Sq}(A) \preceq {}^{\omega}A$.

6. [*Cantorin parinkoodauskuvaus, osa 3*] Tehtävissä 8.5 ja 9.5 muodostettiin Peanon systeemi $(\omega \times \omega, S, (0,0))$ ja isomorfismi $h\colon (\omega, \sigma, 0) \cong (\omega \times \omega, S, (0,0))$. Cantorin parinkoodauskuvaus määriteltiin kuvaukseksi $J = h^{-1}$. Osoita, että kaikilla $m, n \in \omega$ pätee

$$J(m,n) = \frac{1}{2}\left((m+n)^2 + 3m + n\right).$$

[Vihje: Induktiota voi Peanon systeemin määritelmän mukaan tehdä kummassa tahansa Peanon systeemissä.]