Tampereen yliopisto

Joukko-oppi
Harjoitus 13 (27. 11.)
Syksy 2023

1. Vertaa joukkoja ${}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ ja ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$ laskemalla molempien mahtavuudet. Ovatko joukot yhtämahtavia vai onko jompikumpi mahtavampi?

2. Olkoon $A \subseteq \omega$ epätyhjä joukko, jolla pätee $\bigcup A = A$. Osoita, että tällöin $A = \omega$.

3. Olkoon $<$ joukon $\mathbb{Z}_+$ tavallinen tiukka lineaarijärjestys. Olkoon $f(n)$ luvun n alkutekijöiden lukumäärä, kun $n \in \mathbb{Z}_+$. Määritellään joukon $\mathbb{Z}_+$ relaatio R seuraavasti:

$$mRn, \text{ jos ja vain jos joko 1) } f(m) < f(n) \text{ tai 2) } f(m) = f(n) \text{ ja } m < n.$$

Osoita, että R on joukon $\mathbb{Z}_+$ hyvä järjestys.

4. Olkoot $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ ja $(C, \leq_C)$ järjestettyjä joukkoja. Todista, että

$$\big((A, \leq_A) \otimes (B, \leq_B)\big) \otimes (C, \leq_C) \cong (A, \leq_A) \otimes \big((B, \leq_B) \otimes (C, \leq_C)\big).$$

5. Olkoot $\sqsubseteq_i$ joukon A_i ja $\trianglelefteq_i$ joukon B_i osittainen järjestys, missä $i \in \{0, 1\}$. Oletetaan, että $(A_0, \sqsubseteq_0) \cong (A_1, \sqsubseteq_1)$ ja $(B_0, \trianglelefteq_0) \cong (B_1, \trianglelefteq_1)$. Todista, että

$$(A_0, \sqsubseteq_0) \otimes (B_0, \trianglelefteq_0) \cong (A_1, \sqsubseteq_1) \otimes (B_1, \trianglelefteq_1).$$

6. Olkoon $<$ kokonaislukujen joukon $\mathbb{Z}$ tavallinen tiukka järjestys.

a) Osoita, että relaatio

$$\begin{aligned} R =& \{\, (x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z},\ 0 \leq x < y \,\} \\ & \cup \{\, (x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z},\ y < x < 0 \,\} \\ & \cup \{\, (x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z},\ x < 0 \leq y \,\} \end{aligned}$$

on $\mathbb{Z}$:n hyvinjärjestys.

b) Laske $E(1)$, $E(-2)$ ja $E(-3)$, kun E on rakenteeseen $(\mathbb{Z}, R)$ liittyvä Mostowskin romautus eli epsilonkuvafunktio.