Tampereen yliopisto

Joukko-oppi
Harjoitus 14 (4. 12.)
Syksy 2023

1. Oletetaan, että $2 \leq \kappa \leq \lambda$ ja λ on ääretön. Osoita, että $\kappa^\lambda = 2^\lambda$. (Aiemmilla väliaikaismerkinnöillä kirjoittaen tämä olisi $\kappa \uparrow \lambda = 2 \uparrow \lambda$.)

2. Olkoon $\langle A, < \rangle$ hyvinjärjestetty joukko, jonka ordinaaliluku on α. Olkoon $B \subseteq A$, ja olkoon β joukon $\langle B, <^\circ \rangle$ ordinaaliluku. Osoita, että $\beta \in \alpha$ tai $\beta = \alpha$. Esitä esimerkki edellisestä tapauksesta.

3. Sievennä seuraavat ordinaalilausekkeet:

a) $(3 + \omega) \cdot (\omega + 7)$,
b) $5 \cdot \omega + \omega \cdot 2$,
c) $\omega \cdot (\omega + 2) \cdot (\omega + 3)$.

4.

a) Osoita säännöllisyysaksiooman avulla, että ei ole olemassa joukkoa a, jolla $a \in a$, ja ei ole olemassa joukkoja a ja b, joilla $a \in b$ ja $b \in a$.
b) Osoita, että $\{a, \{a\}\} \neq \{b, \{b\}\}$, kun $a \neq b$.

5. Olkoon S joukko ordinaaleja. Osoita, että tällöin joko

a) $\bigcup S \notin S$ ja $\bigcup S$ on rajaordinaali
tai
b) $\bigcup S \in S$ ja $\bigcup S$ on joukon S suurin alkio.

6. Osoita, että kaikilla joukoilla a ja b pätee

a) $\operatorname{rank}(\{a, b\}) = \max(\operatorname{rank}(a), \operatorname{rank}(b))^+$,
b) $\operatorname{rank}(\mathcal{P}(a)) = (\operatorname{rank}(a))^+$.