Tampereen yliopisto

Joukko-oppi
Harjoitus 2 (4. 9.)
Syksy 2023

1. Tarkastellaan ehtoja

∗) $$a \in b \subseteq c$$

ja

†) $$a \subseteq b \in c.$$

Kummasta ehdosta voi johtaa väitteen $a \in c$? Anna esimerkki tilanteesta, jossa hylkäämäsi ehto on voimassa, mutta $a \notin c$.

2. Olkoon $f = \{(0,5),(1,5),(2,7),(4,9),(6,5)\}$.

a) Selitä, miksi f on kuvaus. Onko f^{-1} kuvaus?

b) Määritä $f(2)$, $\mathrm{dom}(f)$ ja $\mathrm{ran}(f)$.

c) Määritä $R = f^{-1} \circ f$. Totea, että R on symmetrinen ja refleksiivinen. [Tällä kurssilla $S \circ T = \{\, (x,z) \mid \exists y((x,y) \in T, (y,z) \in S) \,\}$ riippumatta siitä, ovatko S ja T relaatioita vai funktioita.]

d) Määritä $\mathrm{dom}(R)$ ja $\mathrm{ran}(R)$. Minkä joukon ekvivalenssirelaatio R on?

3. Olkoon $A = \{1, \{\{\emptyset\}\}, 2\}$, missä luonnolliset luvut $1 = \{\emptyset\}$ ja $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ tulkitaan joukoiksi von Neumannin tapaan. Joukko-opissa käytetään yleiselle yhdisteelle usein lyhyttä merkintää $\bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. Määritä seuraavat joukot:

a) $\mathcal{P}(A)$, b) $\bigcup A$, c) $\mathcal{P}(\bigcup A)$, d) $\bigcup \mathcal{P}(A)$, e) $\bigcup\bigcup A$.

4. Oletetaan, että $x, y \in B$. Osoita, että tällöin $\{\{x\}, \{x,y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$.

5.

a) Osoita, että jos $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, niin $\bigcap \mathcal{B} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$.

b) Anna esimerkki perheistä $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$, joilla $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$, mutta $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{B}$.

6. Joukko-opissa on tapana määritellä luonnolliset luvut 1, 2 ja 3 niin, että $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ja $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Merkitään lisäksi $a = \{\{\emptyset\}\}$. Tarkastellaan pareja (x, y), missä x ja samoin y on jokin joukoista 1, 2, 3 tai a. Mille näistä pareista pätee $x \in y$? Entä $x \subseteq y$?