Tampereen yliopisto

Joukko-oppi
Harjoitus 3 (11. 9.)
Syksy 2023

1.

a) Esitä käyttämättä säännöllisyysaksioomaa esimerkki joukosta a, jolle $a \neq \{a\}$. [Myöhemmin kurssilla huomataan, että säännöllisyysaksioomasta seuraa, että *kaikille* joukoille b pätee $b \neq \{b\}$.]

b) Olkoon x joukko. Esitä esimerkki joukosta y, jolle $x \in y$.

c) Piirrä puumainen (tai verkkomainen) esitys joukon $(2,3) = \{\{2\},\{2,3\}\}$ rakenteesta. Kaaviossa särmä ylhäältä alas kertoo, että alempi joukoista on ylemmän alkio, ja kaavion ylimpänä alkiona on juuri pari $(2,3)$. Jatka kussakin haarassa kaaviota niin pitkälle, että pääset tyhjään joukkoon saakka.

2. Ratkaise joukko-opillinen yhtälö

$$\mathcal{P}(x) = \{x \cup \{\emptyset\}, \emptyset\}.$$

3. Osoita, että ei ole olemassa joukkoa, jonka alkioita ovat kaikki parit. (Vihje: Palauta tilanne kaikkien joukkojen joukon olemattomuuteen.)

4. Olkoon $\mathcal{A}$ perhe ja B joukko. Osoita, että $(\bigcup \mathcal{A}) \times B = \bigcup\{\, X \times B \mid X \in \mathcal{A} \,\}$.

5. Mitkä seuraavista väitteistä pätevät yleisesti kaikille relaatioille R?:

a) $R[A \cap B] = R[A] \cap R[B]$.

b) $R[A \setminus B] = R[A] \setminus R[B]$.

c) $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$.

Jos väite pätee yleisesti, todista se, muuten esitä vastaesimerkki.

6. Olkoot f ja g kuvauksia. Osoita, että $f \cup g$ on kuvaus, jos ja vain jos $f(x) = g(x)$ jokaisella $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$.