Tampereen yliopisto

Joukko-oppi
Harjoitus 4 (18. 9.)
Syksy 2023

**1.** Olkoon

$$S = \Big\{ \big(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \emptyset\big),\ \big(\emptyset, \{\emptyset\}\big) \Big\}.$$

Onko $S$ relaatio? Onko $S$ kuvaus? Laske seuraavat joukot:

| | | |
|---|---|---|
| a) $S(\emptyset)$ | b) $S[\emptyset]$ | c) $S[\{\emptyset\}]$ |
| d) $S[\{\emptyset, \{\emptyset\}\}]$ | e) $S^{-1}$ | f) $S \circ S$ |
| g) $S{\restriction}\emptyset$ | h) $S{\restriction}\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ | i) $\bigcup\bigcup S$. |

**2.** Osoita, että relaatio $R$ on symmetrinen ja transitiivinen, jos ja vain jos $R = R^{-1} \circ R$.

**3.** Olkoot $A$ ja $B$ joukkoja sekä $R$ ja $S$ relaatioita. Todista seuraavat väitteet:

a) Jos $A \subseteq B$, niin $R[A] \subseteq R[B]$.
b) $(R \circ S)[A] = R[S[A]]$.
c) $R{\restriction}(A \cup B) = (R{\restriction}A) \cup (R{\restriction}B)$.

**4.** Olkoon $f$ kuvaus. Osoita, että

a) $f \circ f^{-1}$ on aina kuvaus ja jopa injektio
mutta
b) $f^{-1} \circ f$ on injektio, jos ja vain jos $f^{-1} \circ f$ on kuvaus, jos ja vain jos $f$ on injektio.
Esitä näiden havaintojen perusteella esimerkki kuvauksesta $f$, jolle
c) $f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$.

**5.** Todista, ettei ole olemassa joukkoa, joka koostuisi täsmälleen pareista $(x, y)$, missä $x \in y$, ts.

$$\{\, (x, y) \mid x \in y \,\}$$

ei ole joukko.

**6.** Osoita, että seuraava väite on ekvivalentti valinta-aksiooman kanssa aksioomajärjestelmän ZF suhteen:

Jokaisella joukolla $\mathcal{A}$ on olemassa funktio $F$, jolle $\mathrm{dom}(F) = \bigcup \mathcal{A}$ ja jokaisella $x \in \bigcup \mathcal{A}$ pätee $x \in F(x) \in \mathcal{A}$.