Tampereen yliopisto

Joukko-oppi
Harjoitus 5 (25. 9.)
Syksy 2023

**1.** Olkoon $\mathcal{A}$ perhe ja $B$ joukko. Osoita, että $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\bigcup \mathcal{A})$ ja $B = \bigcup \mathcal{P}(B)$. Esitä esimerkki perheestä $\mathcal{A}$, jolle $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(\bigcup \mathcal{A})$.

**2.** Olkoot $f\colon A \to B$ ja $g\colon B \to C$ kuvauksia.

a) Osoita, että jos $g \circ f$ on injektio, niin $f$ on injektio.
b) Osoita, että jos $g \circ f\colon A \to C$ on surjektio, niin $g\colon B \to C$ on surjektio.
c) Esitä esimerkki tilanteesta, jossa $g \circ f\colon A \to C$ on bijektio, vaikka $f\colon A \to B$ ei ole surjektio ja $g$ ei ole injektio.

**3.** Osoita, että kun $A$ ja $B$ ovat joukkoja, niin on olemassa erilliset $A'$ ja $B'$, joille $A \approx A'$ ja $B \approx B'$. Päteekö valttämättä $A \cup B \approx A' \cup B'$?

**4.** Todista, että kaikille joukoilla $A$, $B$ ja $C$ pätee:

a) $A \approx A$,
b) jos $A \approx B$, niin $B \approx A$, ja
c) jos $A \approx B$ ja $B \approx C$, niin $A \approx C$.

**5.** Osoita, että jos $A \preceq B$, niin $\mathcal{P}(A) \preceq \mathcal{P}(B)$. Päteekö yleisesti, että $\bigcup A \preceq \bigcup B$ aina kun $A \preceq B$?

**6.** Todista, että jos $A \preceq C$ ja $B \preceq D$, niin $A \times B \preceq C \times D$.