Tampereen yliopisto

Joukko-oppi
Harjoitus 6 (2. 10.)
Syksy 2023

1. Olkoon f funktio, A, B joukkoja.

a) Totea, että joukon A kuva käänteisrelaation f^{-1} suhteen on

$$f^{-1}[A] = \{\, x \in \mathrm{dom}(f) \mid f(x) \in A \,\},$$

mikä vastaa tavanomaista alkukuvan määritelmää.

b) Osoita, että

$$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B].$$

c) Esitä esimerkki tilanteesta, jossa

$$f[A \cap B] \neq f[A] \cap f[B].$$

2. Joukkojen koon vertailulle on esitettävissä duaalinen versio: Joukko A on *heikosti korkeintaan yhtä mahtava kuin* B, $A \preceq^* B$, jos $A = \emptyset$ tai on olemassa surjektio $g\colon B \to A$. Todista, että jos $A \preceq B$, niin $A \preceq^* B$. Osoita siis, että kun $f\colon A \to B$ injektio, missä $A \neq \emptyset$, niin on olemassa surjektio $g\colon B \to A$.

3.

a) Olkoon $f : A \to B$ surjektio. Määritellään funktio $G : B \to \mathcal{P}(A)$ asettamalla $G(b) = \{x \in A \mid f(x) = b\} = f^{-1}[\{b\}]$, kun $b \in B$. Osoita, että G on injektio.

b) Näytä (ilman valinta-aksioomaa), että jos $X \preceq^* Y$, niin $X \preceq \mathcal{P}(Y)$.

4. Olkoon A Dedekind-ääretön joukko ja $B \neq \emptyset$. Osoita, että $\mathcal{P}(A)$ ja $A \times B$ ovat Dedekind-äärettömiä.

5. Osoita, että jos $A \preceq C$, $B \preceq D$, $2 \preceq A$ ja $2 \preceq B$ (eli A ja B sisältävät vähintään kaksi alkiota), niin $A \cup B \preceq C \times D$.

6. Milloin relaatio on yhtä aikaa osittainen järjestys ja ekvivalenssirelaatio? Esitä esimerkki osittaisesta järjestyksestä, joka ei ole ekvivalenssirelaatio, ja ekvivalenssirelaatiosta, joka ei ole osittainen järjestys.