Tampereen yliopisto

Joukko-oppi
Harjoitus 7 (9. 10.)
Syksy 2023

1. Kiinnitetään eri alkiot a ja b (Hausdorff itse valitsi arvot $a = 1$ ja $b = 2$) ja määritellään alkioiden x ja y *Hausdorffin järjestetyn parin* olevan

$$(x, y)_{\mathrm{H}} = \{\{x, a\}, \{y, b\}\}.$$

Osoita, että kaikilla x, y, z ja t pätee

$$(x, y)_{\mathrm{H}} = (z, t)_{\mathrm{H}}, \text{ jos ja vain jos } \begin{cases} x = z \\ y = t. \end{cases}$$

2. Todista, että suljettu väli $[0, 1]$, puoliavoin väli $[0, 1[$ ja avoin väli $]0, 1[$ ovat yhtämahtavia käyttämällä vain ensimmäisen asteen polynomikuvauksia ja Cantorin, Schröderin ja Bernsteinin lausetta. [Reaalilukujen perusominaisuudet saa olettaa tunnetuiksi.]

3. Osoita, että kuvaus $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f(m, n) = 2^m(2n + 1) - 1,$$

on bijektio. [Tässä tehtävässä puolestaan voi olettaa luonnollisten lukujen aritmeettiset ominaisuudet tunnetuiksi.]

4.

a) Olkoon E joukon A relaatio. Todista, että E on ekvivalenssirelaatio, jos ja vain jos on olemassa kuvaus f, jolle $\mathrm{dom}(f) = A$ ja

$$E = \{\, (x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y) \,\}.$$

[Vihje: Käytä toiseen suuntaan ekvivalenssiluokkia kuvauksen arvoina.]

b) Osoita edellisen tuloksen avulla, että kahden joukon A ekvivalenssirelaation leikkaus on edelleen joukon A ekvivalenssirelaatio. Entä kahden ekvivalenssirelaation yhdiste?

5.

a) Esitä luonnollinen luku 4 joukkona pelkästään aaltosulkeita ja pilkkuja käyttäen.
b) Laske $\bigcup 4$ ja $\bigcap 4$.
c) Osoita, että $3 \setminus 1 = (0, 1)$.

6. Todista, että luonnollisten lukujen yhteenlasku on liitännäinen: kaikilla $m, n, p \in \omega$ pätee $m + (n + p) = (m + n) + p$.