Tampereen yliopisto

Lineaarialgebra 2
Harjoitus 1 (9. 1.)
Kevät 2024

Nämä ovat esitietoharjoitukset, jotka perustuvat kurssin esitietovaatimuksiin.

1. Ryhmien $(G, \odot)$ ja $(H, \otimes)$ *karteesinen tulo* on rakenne $(G \times H, \cdot)$, jossa

$$(g, h) \cdot (g', h') = (g \odot g', h \otimes h'),$$

kun $g, g' \in G$ ja $h, h' \in H$. Osoita, että $(G \times H, \cdot)$ on ryhmä. Onko se Abelin ryhmä, jos $(G, \odot)$ ja $(H, \otimes)$ ovat Abelin ryhmiä?

2. Olkoot $m, n \in \mathbb{Z}_+$ lukuja, joille $\operatorname{syt}(m, n) = 1$. Todista, että

$$(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}, +) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +).$$

3. Olkoon f epimorfismi eli surjektiivinen homomorfismi ryhmästä $\mathbb{G}$ ryhmään $\mathbb{H}$. Osoita seuraavat väitteet tosiksi:

a) Jos $\mathbb{G}$ on syklinen ryhmä, niin myös $\mathbb{H}$ on syklinen.
b) Jos $\mathbb{G}$ on Abelin ryhmä, niin myös $\mathbb{H}$ on Abelin ryhmä.

4. Määritä lineaarikuvausten $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x, y) = (x + y, 2x - 3y)$ ja $B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $B(x, y) = (y, x - 5y)$ matriisit sekä laske $A \circ B$.

5. Lineaarikuvausten $A, B\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ matriisit ovat

$$M(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad M(B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Onko A injektio? Onko B injektio?

6. Neljän alkion kunnan $(K, +, \cdot)$ alkiot ovat 0, 1, a ja b. Määritä kunnan yhteen- ja kertolaskutaulut.