Tampereen yliopisto

Lineaarialgebra 2
Harjoitus 10 (19. 3.)
Kevät 2024

1. Olkoon $\boldsymbol{K} = (K, +, \cdot)$ kunta, jolloin $K[x]$ on luonnollisella tavalla K-vektoriavaruus. Toisaalta $\boldsymbol{K}[x] = (K[x], +, \cdot)$ on kunnan $\boldsymbol{K}$ polynomirengas.

a) Totea, että jokainen $\boldsymbol{K}[x]$:n ideaali I on $K[x]$:n aliavaruus. Palauta mieleen, miksi jollakin $p \in K[x]$ pätee
$$I = \{\, qp \mid q \in K[x] \,\}.$$

b) Etsi I:lle jokin (algebrallinen) komplementti C. Mitä ovat $\dim(I)$, $\dim(K[x]/I)$ ja $\dim(C)$ ($\deg(p)$:n avulla lausuttuna)?

c) Onko jokainen $K[x]$:n alimoduli kääntäen renkaan $\boldsymbol{K}[x]$ ideaali?

2. Tarkastellaan kaksiulotteista $\mathbb{Z}_5$-avaruutta $V = {\mathbb{Z}_5}^2$. Kuinka monta projektiota $P\colon V \to V$ on olemassa? Esitä esimerkki projektiosta P, joka ei ole identtinen kuvaus eikä nollakuvaus eikä kumpikaan koordinaattiprojektioista.

3. Olkoon M moduli ja $A \in L(M)$ *nilpotentti*, ts. $A^n = \mathit{0}$ jollakin $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että $\mathrm{id}_M - A \in L(M)^*$ (eli $\mathrm{id}_M - A$ on kääntyvä $L(M)$:ssä) ja että
$$(\mathrm{id}_M - A)^{-1} = \mathrm{id}_M + A + \cdots + A^{n-1}.$$

4. Tarkastellaan $\mathbb{Z}_7$-vektoriavaruutta $V = (\mathbb{Z}_7)^5$ ja lineaarikuvausta $A\colon V \to V$, jolle
$$A(e_0) = e_1, \quad A(e_1) = e_2, \quad A(e_2) = e_0, \quad A(e_3) = e_4, \quad A(e_4) = e_3,$$
missä $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ on avaruuden V luonnollinen kanta. Määritä kuvauksen A ominaisarvot ja vastaavat ominaisvektorit.

5. Merkitään $A\colon S \to S$,
$$A(x)(n) = \begin{cases} 0, & \text{kun } n = 0 \\ x(n-1), & \text{muuten,} \end{cases}$$
missä $S = {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ on reaalinen vektoriavaruus. Määritä lineaarikuvauksen A pistespektri $\mathrm{P}\sigma(A)$ ja spektri $\sigma(A)$.

6. Olkoot V epätriviaali K-vektoriavaruus ja $S \subseteq K$ epätyhjä joukko. Oletetaan, että $|S| \le \dim(V)$. Todista, että on olemassa lineaarikuvaus A, jolle $\mathrm{P}\sigma(A) = S$.

[Vihje: Kiinnitä V:lle kanta ja valitse A sopivasti niin, että kantavektoreista tulee ominaisvektoreita.]