Tampereen yliopisto

Lineaarialgebra 2
Harjoitus 11 (26. 3.)
Kevät 2024

1. Kun U ja V ovat reaalisen vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ eri yksiulotteisia aliavaruuksia, merkitään $p_{U,V}$:llä projektiota aliavaruudelle U suuntaan V. Merkitään

$$\begin{aligned} X &= \{\,(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\,\}, \\ Y &= \{\,(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\,\}, \\ D &= \{\,(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\,\}. \end{aligned}$$

Tarkastellaan projektioita $p, q \in \{p_{D,X}, p_{D,Y}, p_{X,D}, p_{X,Y}, p_{Y,X}, p_{Y,D},\}$.

a) Esitä esimerkki tällaisista projektioista p ja q, joille $p \circ q$ ei ole projektio.
b) Esitä lisäksi esimerkki tapauksesta, jossa sekä $p \circ q$ että $q \circ p$ ovat projektioita, mutta $p \circ q \neq q \circ p$.

2. Olkoon $\boldsymbol{K} = (K, +, \cdot)$ kunta. Määritä lineaarikuvauksen $A\colon K[x] \to K[x]$,

$$A(p) = xp,$$

pistespektri $\mathrm{P}\sigma(A)$ ja spektri $\sigma(A)$. [Huomaa, että x yllä on polynomirenkaan $\boldsymbol{K}[x]$ tuntematon eikä vektori.]

3. Esitä esimerkki $\mathbb{R}^3$:n duaalin alkioista $x^*, y^*, z^* \in (\mathbb{R}^3)^*$, joille

$$x^*(1,2,3) = 1,\ y^*(1,2,3) = -2,\ z^*(1,2,3) = 6$$

ja $\{x^*, y^*, z^*\}$ on vapaa.

4. Olkoon M moduli ja $x^*, y^* \in M^*$. Oletetaan, että $\mathrm{Ker}(x^*) = \mathrm{Ker}(y^*)$. Osoita, että järjestetty pari (x^*, y^*) on sidottu duaalissa M^*.

5. Olkoot V ja Z K-vektoriavaruuksia ja $F\colon V \times Z \to K$. Millä ehdolla F on yht'aikaa sekä lineaarinen ja bilineaarinen? (Toisaalta karteesinen tulo $V \times Z$ on K-vektoriavaruus, toisaalta kuvauksen voi tulkita olevan kahden muuttujan kuvaus.)

6. *[Vapaiden modulien teoriaa 3]* Jatketaan tehtävien 7.6 ja 9.6 teemaa: Olkoon $\boldsymbol{R} = (R, +, \cdot)$ vaihdannainen rengas ja L vapaa R-moduli. Oletetaan tunnetuiksi seuraavat faktat.

Fakta 1: Jokaisella epätriviaalilla renkaalla on maksimaalinen ideaali.
Fakta 2: $\boldsymbol{R}$:n ideaali I on $\boldsymbol{R}$:n maksimaalinen, jos ja vain jos tekijärengas $\boldsymbol{R}/I$ on kunta.

Fakta 1 on suoraviivainen Zornin lemman seuraus. Fakta 2 käydään läpi Algebra 2:n kurssilla. Yhdistele näitä faktoja aiempien harjoitustehtävien tuloksiin ja todista, että modulin L kannat ovat keskenään yhtämahtavia.