Tampereen yliopisto

Lineaarialgebra 2
Harjoitus 12 (9. 4.)
Kevät 2024

1. Näytä, että $\mathbb{Z}$-moduleilla $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{Q}$ on triviaali duaali.

2. Olkoot U ja V epätriviaaleja K-vektoriavaruuksia.

a) Olkoot edelleen $c \in K$, $u \in U$ ja $v \in V$. Oletetaan, että $c \neq \pm 1$, $u \neq \bar{0}$ ja $v \neq \bar{0}$. Todista, että $\{(cu, v), (u, cv)\}$ on vapaa $U \times V$:ssä.

b) Osoita, että on olemassa lineaarinen muoto $A\colon U \times V \to K$, joka *ei toteuta* ehtoa

$$A(ax, y) = A(x, ay)$$

kaikilla $a \in K$, $x \in U$ ja $y \in V$.

3. Olkoot L_0, L, M_0, M ja N R-moduleita, $A\colon L_0 \to L$ ja $B\colon M_0 \to M$ lineaarikuvauksia. Olkoon edelleen $f\colon L \times M \to N$ bilineaarikuvaus. Osoita, että kuvaus $g\colon L_0 \times M_0 \to N$,

$$g(x, y) = f(A(x), B(y))$$

on bilineaarikuvaus.

4. Tarkastellaan reaalisen vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $U = \mathrm{sp}(\{(3, 2, -1)\})$. Määritä kohtisuoralle avaruudelle U° jokin kanta. Esitä kantavektorit koordinaattimuotojen avulla.

5. Osoita, että $S^\circ = (\mathrm{sp}(S))^\circ$, kun S on modulin M osajoukko, missä modulin M kerroinrenkaan oletetaan olevan vaihdannainen.

6. Olkoot U ja Z vektoriavaruuden V aliavaruuksia. Näytä, että

$$(U \cap Z)^\circ = U^\circ + Z^\circ.$$