Tampereen yliopisto

Lineaarialgebra 2
Harjoitus 13 (16. 4.)
Kevät 2024

1. Olkoon V vektoriavaruus ja $A \in L(V)$ nilpotentti. Näytä, että ${}^{\mathrm{t}}A$ on nilpotentti.

Tarkastellaan bilineaarikuvausta $f\colon M \times N \to P$, missä M, N ja P ovat saman vaihdannaisen renkaan $(R, +, \cdot)$ moduleita. Bilineaarikuvausta f vastaava *vasemmanpuoleinen nollamoduli* on

$$\mathrm{N}_0(f) = \{\, x \in M \mid \text{Kaikilla } y \in N \text{ pätee} f(x, y) = 0 \,\}.$$

Vastaava *oikeanpuoleinen nollamoduli on*

$$\mathrm{N}_1(f) = \{\, y \in N \mid \text{Kaikilla } x \in M \text{ pätee} f(x, y) = 0 \,\}.$$

Bilineaarikuvauksen f sanotaan olevan *degeneroitumaton*, jos nollamodulit ovat triviaaleja moduleja, ts. $\mathrm{N}_0(f) = \mathrm{N}_1(f) = \{\bar{0}\}$, muuten *degeneroitunut*.

2. Olkoot $f\colon M \times N \to P$ R-bilineaarikuvaus kuten yllä. Osoita, että $\mathrm{N}_0(f)$ on modulin M ja $\mathrm{N}_1(f)$ modulin N alimoduli.

3. Olkoon V K-vektoriavaruus ja U sen aito aliavaruus. Tarkastellaan luonnollista bilineaarikuvausta $f\colon V \times V^* \to K$,

$$f(x, x^*) = \langle x, x^* \rangle.$$

Osoita, että $f{\restriction}(U \times V^*)$ on degeneroitunut bilineaarikuvaus.

4. Olkoon $f\colon M \times N \to R$ degeneroitumaton bilineaarimuoto, missä kerroinrengas on vaihdannainen. Todista, että moduli N uppoaa duaaliin M^* lineaarikuvauksella.

5. Tarkastellaan euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ tensorituloa itsensä kanssa. Osoita (vetoamalla kuvauksen $\otimes\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ bilineaarisuuteen), että kaikilla vektoreilla $x, y \in \mathbb{R}^2$ tensoritulon $x \otimes y$ voi kirjoittaa muotoon

$$x \otimes y = \lambda_{0,0}(e_0 \otimes e_0) + \lambda_{0,1}(e_0 \otimes e_1) + \lambda_{1,0}(e_1 \otimes e_0) + \lambda_{1,1}(e_1 \otimes e_1).$$

[Luennoilla esitetään tämän tuloksen yleinen versio.]

6. Tarkastellaan $\mathbb{Z}_3$-vektoriavaruutta $V = {\mathbb{Z}_3}^2$. Merkitään $S = {}^{V \times V}\mathbb{Z}_3$ ja $S_1 = \mathrm{sp}(C_1)$, missä

$$\begin{aligned} C_1 = &\{\, (ax) \boxtimes y - a(x \boxtimes y) \mid a \in \mathbb{Z}_3, x, y \in V \,\} \\ &\cup \{\, (x \boxtimes (ay) - a(x \boxtimes y) \mid a \in \mathbb{Z}_3, x, y \in V \,\}, \end{aligned}$$

missä merkintää $\boxtimes$ käytetään kuten luennoilla tensoritulon määritelmässä. Määritä kustakin vektoriavaruudesta V, S, S_1 ja S/S_1 alkioiden lukumäärät ja dimensiot. Miksi $S/S_1 \not\cong V \otimes V$?