Tampereen yliopisto

Lineaarialgebra 2
Harjoitus 14 (23. 4.)
Kevät 2024

1. Olkoon V vektoriavaruus, $y \in V$, $x^* \in V^*$. Asetetaan

$$A\colon V \to V,\ A(x) = x^*(x)y.$$

Näytä, että A on lineaarikuvaus. Millä ehdolla A on projektio?

2. Osoita, että $\mathbb{Z}$-modulien $\mathbb{Z}_{2019}$ ja $\mathbb{Z}_{2024}$ tensoritulolle pätee $\mathbb{Z}_{2019} \otimes \mathbb{Z}_{2024} = \{\bar{0}\}$. (Usein tensoritulo kirjoitetaan epäselvyyksien välttämiseksi niin, että merkinnästä ilmenee kerroinrengas, ts. kirjoitetaan $\mathbb{Z}_{2019} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{2024} = \mathbb{Z}_{2019} \otimes \mathbb{Z}_{2024}$.) [Vihje: Huomaa tensoritulon bilineaarisuus.]

3. Olkoon I ja J joukkoja sekä $(K, +, \cdot)$ kunta. Määritellään kuvauksille $x\colon I \to K$ ja $y\colon J \to K$ *funktionaalinen tensoritulo*

$$x \otimes_{\mathrm{f}} y\colon I \times J \to K,\ (x \otimes_{\mathrm{f}} y)(i,j) = x(i)y(j).$$

Olkoon U vektoriavaruuden ${}^{I}K$ ja olkoon V vektoriavaruuden ${}^{J}K$ aliavaruus. Näille vektoriavaruuksille *funktionaalinen tensoritulo* määritellään vastaavasti

$$U \otimes_{\mathrm{f}} V = \mathrm{sp}(\{\, x \otimes_{\mathrm{f}} y \mid x \in U,\ y \in V \,\}).$$

Todista, että

$$U \otimes_{\mathrm{f}} V \cong U \otimes V.$$

4. Tarkastellaan reaalista vektoriavaruutta $V = \mathbb{R}^3$ ja tensoritulon $V \otimes V$ tensoria

$$t = e_0 \otimes e_0 + e_0 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_0 - e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2,$$

missä $\{e_0, e_1, e_2\}$ on avaruuden V luonnollinen kanta. Määritä tensorin t aste.

5. **(Shakkilaudan mustat ruudut)** Tarkastellaan $\mathbb{Z}_2$-vektoriavaruutta $V = {\mathbb{Z}_2}^I$, missä $I = \{1, \ldots, 8\}$. Sillä on luonnollinen kanta $E = \{\, e_i \mid i \in I \,\}$. Mikä on tensorin

$$t = \sum_{\substack{(i,j) \in I \times I, \\ 2 \mid i+j}} e_i \otimes e_j \in V \otimes V$$

aste?

6.

a) Esitä $(1,1) \otimes (-1,5) + (1,-3) \otimes (-1,3)$ tensoritulon $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ luonnollisen kannan $\{e_0 \otimes e_0, e_0 \times e_1, e_1 \otimes e_0, e_1 \otimes e_1\}$ lineaarikombinaationa, missä $e_0 = (1,0)$ ja $e_1 = (0,1)$.

b) Esitä luonnollisen kannan lineaarikombinaationa $t \wedge t$, kun $t = (e_0 \wedge e_1) - (e_2 \wedge e_3)$, missä $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ on $\mathbb{R}^4$:n luonnollinen kanta.