Tampereen yliopisto

Lineaarialgebra 2
Harjoitus 2 (16. 1.)
Kevät 2024

1. Olkoon $(R, +, \cdot)$ rengas. Todista, että kaikilla $a \in R$ pätee $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

Renkaan $(R, +, \cdot)$ alkiota t kutsutaan kääntyväksi, jos on olemassa $u \in R$, jolle $tu = ut = 1$ (ts. t^{-1} on olemassa). R:n kääntyvien alkioiden joukkoa merkitään R^*:llä.

2. Määritä renkaan $(\mathbb{Z}/126\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kääntyvien alkioiden joukko.

3. Esitä esimerkki
a) $\mathbb{R}^2$:n osajoukosta, joka on suljettu skalaarilla kertomisen mutta ei yhteenlaskun suhteen,
b) $\mathbb{R}^2$:n osajoukosta, joka on suljettu yhteenlaskun mutta ei skalaarilla kertomisen suhteen.

4. Esitä esimerkki sellaisista Abelin ryhmästä $(M, +)$ ja vähintään kaksialkioisesta renkaasta $(R, +, \cdot)$, että M:ää ei voi varustaa skalaarikerronnalla niin, että siitä muodostuisi R-moduli.

5. Olkoon $(G, +)$ Abelin ryhmä ja

$$H = \{\, f\colon G \to G \mid f \text{ on ryhmähomomorfismi} \,\}.$$

Määritellään skalaarikerronta niin, että $fx = f(x)$, kun $f \in H$ ja $x \in G$. Osoita, että näin G:stä saadaan H-moduli.

6. Olkoon X joukko. Kun $A, B \subseteq X$, merkitään

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Osoita, että $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ on Abelin ryhmä ja että $\mathcal{P}(X)$:stä tulee $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-vektoriavaruus, kun se varustetaan skalaarikerronnalla

$$\bar{1} \cdot A = A,\ \bar{0} \cdot A = \emptyset,$$

kun $A \in \mathcal{P}(X)$, missä on merkitty $\bar{n} = n + 2\mathbb{Z}$, kun $n \in \{0, 1\}$.